

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»**

**Л. М. Куценко, О. В. Шоман**

# **ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ, ЯВИЩ І ПРОЦЕСІВ**

Навчальний посібник  
для студентів і аспірантів закладів вищої освіти

Рекомендовано Вченою радою НТУ "ХПІ"

Харків, 2023

УДК 004.925.8  
К 95

Рецензенти:

**Ю. М. Тормосов**, доктор технічних наук, професор, Харківський державний університет харчування та торгівлі;

**О. М. Соболев**, доктор технічних наук, старший науковий співробітник, Національний університет цивільного захисту України.

Рекомендовано Вченою радою НТУ «ХПІ» як навчальний посібник для студентів і аспірантів закладів вищої освіти, протокол № 10 від 22.12.2018 р.

Автори: **Куценко Леонід Миколайович, Шоман Ольга Вікторівна**

К 95 Геометричне моделювання об'єктів, явищ і процесів: навч. посіб. / Л. М. Куценко, О. В. Шоман. – Харків : ТОВ "ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ЦЕНТР ГРУП", 2023. – 246 с.

DOI: 10.62067/978-617-8242-05-3

ISBN 978-617-8242-05-3 (PDF)

ISBN 978-617-8242-06-0 (тверда обкладинка)

Надано відомості про побудову геометричних моделей для об'єктів тривимірного простору. Пояснено реалізацію методів і способів прикладної геометрії. Розглянуто математичні основи розв'язання задач геометричного моделювання. Подано інформацію про формування в задачах моделювання об'єктів, явищ і процесів. Показано застосування геометричних підходів до розв'язання наукових та інженерних задач стосовно різних впроваджень. Продемонстровано використання засобів анімаційного моделювання для різного класу задач. В розділах книги наведено приклади, що полегшують сприйняття викладеного матеріалу.

Призначено для аспірантів і студентів закладів вищої освіти, науково-педагогічних та інженерно-технічних працівників.

Лл. 178. Табл. 6. Бібліогр. 21 назв.

УДК 004.925.8

ISBN 978-617-8242-05-3 (PDF)

ISBN 978-617-8242-06-0 (тверда обкладинка)

Всі права захищені. Жодна частина цієї книги не може бути передрукована, відтворена або використана в будь-якій формі або будь-якими електронними, механічними або іншими засобами, відомими або винайденими в майбутньому, включаючи фотокопіювання і перезапис, або в будь-якій системі зберігання і пошуку інформації, без письмового дозволу авторів.

Ця книга містить інформацію, отриману з достовірних і високоповажних джерел. Було докладено розумних зусиль для публікації достовірних даних та інформації, але автор і видавець не можуть взяти на себе відповідальність за достовірність усіх матеріалів або за наслідки їхнього використання. Автори та видавці намагалися відстежити власників авторських прав на всі матеріали, відтворені в цій публікації, і приносять вибачення власникам авторських прав, якщо дозвіл на публікацію в такому вигляді не був отриманий. Якщо якийсь матеріал не був визнаний захищеним авторським правом, будь ласка, напишіть нам і повідомте про це, щоб ми могли виправити це в будь-якому майбутньому перевиданні. Видавець, автори та редактори можуть з упевненістю стверджувати, що поради та інформація, наведені в цій книзі, є правдивими і точними на дату публікації. Ані видавець, ані автори, ані редактори не дають жодних гарантій, явних чи неявних, щодо матеріалів, які містяться в цій книзі, або за будь-які помилки чи упущення, які могли бути допущені.

Повідомлення про торгові марки: Назви продуктів або компаній можуть бути торговельними марками або зареєстрованими торговельними марками і використовуються лише для ідентифікації та пояснення без наміру порушити права на них.

## ЗМІСТ

Передмова.....	1
Вступ.....	3
<b>РОЗДІЛ 1. Аналітичний опис геометричних об'єктів як основа формування проєкційних зображень .....</b>	<b>5</b>
1.1. Сутність опису геометричного об'єкта за допомогою аналітичного рівняння .....	5
1.2. Зміст поняття функції .....	7
1.3. Геометричні характеристики функції.....	9
1.4. Опис базових об'єктів .....	13
1.5. Обернена задача аналітичної геометрії.....	17
1.6. Визначення $R$ -функцій і операцій теорії множин.....	19
1.7. Опис геометричних об'єктів $R$ -функціями.....	27
Контрольні запитання та вправи .....	31
<b>РОЗДІЛ 2. Основні положення теорії паралельних множин .....</b>	<b>32</b>
2.1. Елементи теорії паралельних множин .....	32
2.2. Дві концепції геометричного моделювання узагальнених паралельних множин .....	35
2.2.1. "Променева" і "хвильова" точки зору на поширення збурення в середовищі.....	35
2.2.2. Поняття рівняння ейконала .....	42
2.2.3. Розв'язок рівняння ейконала на основі варіаційного принципу Ферма .....	44
2.2.4. Закони оптики і варіаційний принцип Ферма .....	46
2.3. Особливості задач формоутворення сімей паралельних і квазіпаралельних кривих та поверхонь .....	48
2.4. Огляд методів опису паралельних і квазіпаралельних ліній і поверхонь.....	53
Контрольні запитання та вправи.....	73
<b>РОЗДІЛ 3. Геометричне моделювання паралельних множин на основі поняття нормальних функцій .....</b>	<b>74</b>
3.1. Поняття та графічне подання нормальних функцій.....	74

3.2. Алгоритм побудови нормальних функцій для плоских кривих..	84
3.3. Алгоритм побудови нормальних функцій для поверхонь.....	90
3.4. Можливості застосування нормальних функцій для визначення сімей паралельних ліній та поверхонь .....	96
Контрольні запитання та вправи.....	107

#### **РОЗДІЛ 4. Квазіпаралельні криві та функції комплексної змінної**

4.1. Використання конформних відображень для генерації розрахункових регулярних сіток .....	108
4.2. Метод конформних відображень в задачах інтерпретації паралельних множин .....	113
4.2.1. Метод конформних відображень за допомогою інтеграла Крістоффеля – Шварца .....	114
4.2.2. Конформне відображення круга на внутрішню і зовнішню області $n$ -кутника .....	121
4.2.3. Універсальний підхід до конформного відображення круга одиничного радіуса на заданий $n$ -кутник .....	124
4.3. Розв'язання граничної задачі теорії фільтрації .....	127
4.4. Геометрична інтерпретація силових ліній вихору .....	131
4.4.1. Геометрична інтерпретація комплексних потенціалів аналітичних функцій .....	131
4.4.2. Графічне пояснення формоутворення силових ліній вихору.....	135
4.4.3. Графічна інтерпретація формоутворення силових ліній вихору в задачі фільтрації .....	137
4.5. Приклади задач побудови квазіпаралельних ліній.....	143
Контрольні запитання та вправи.....	152

#### **РОЗДІЛ 5. Метод іміджевої екстраполяції**

5.1. Сутність геометричного прогнозування фронтів явищ і процесів.....	153
5.2. Теоретичні основи іміджевої інтерполяції та екстраполяції ..	155
5.2.1. Лінійна інтерполяція .....	156
5.2.2. Сплайн-інтерполяція .....	157
5.2.3. Іміджева інтерполяція .....	164
5.2.4. Опис вузлових зображень за допомогою нормальних рівнянь .....	167

---

5.2.5. Іміджева екстраполяція на основі поліноміальної інтерполяції .....	170
5.3. Векторна іміджева екстраполяція .....	172
5.4. Зворотна іміджева екстраполяція .....	182
5.4.1. Приклад практичного застосування методу іміджевої екстраполяції.....	182
5.4.2. Зворотна іміджева екстраполяція .....	190
Контрольні запитання та вправи.....	193

**РОЗДІЛ 6. Візуалізація і анімація в задачах геометричного моделювання .....**

<b>моделювання .....</b>	<b>194</b>
6.1. Геометричне моделювання на основі властивостей геодезичних кривих.....	194
6.1.1. Геодезична лінія за заданими точкою і напрямком на гладкій поверхні .....	195
6.1.2. Геодезична лінія між двома заданими точками на гладкій поверхні.....	198
6.2. Геометричне моделювання шляху переміщення робота серед перешкод .....	204
6.2.1. Спосіб вибору шляху мобільного робота на площині серед перешкод у вигляді прямокутників в плані .....	206
6.2.2. Геометрична інтерпретація методу потенціалів для пояснення трасування шляху робота .....	211
6.3. Геометричне моделювання поведінки динамічних систем ..	217
6.4. Моделювання поверхні нерухомого відбивача у випадку рухомого джерела променів.....	226
6.5. Геометричне моделювання автохвильових процесів .....	233
6.5.1. Поняття та геометрична інтерпретація автохвильових процесів .....	233
6.5.2. Основні моделі автохвильових процесів .....	235
6.5.3. Приклади графічного представлення автохвиль .....	236
6.5.4. Комп'ютерне моделювання процесів на локальному рівні мовою "клітинних автоматів" .....	239
Контрольні запитання та вправи.....	243

<b>Список джерел інформації .....</b>	<b>244</b>
---------------------------------------	------------

---

## СПИСОК ТАБЛИЦЬ

1.1.	Опорні області і локуси	13
2.1.	Аналогічні поняття геометричної оптики і механіки	41
2.2.	Види процесів і явищ та їх геометрична інтерпретація	50
2.3.	Опис паралельної поверхні залежно від форми задання початкової поверхні	59
4.1.	Математична аналогія опису стаціонарних полів різної фізичної природи	145
4.2.	Електрогідродинамічна аналогія	146

## СПИСОК РИСУНКІВ

1.1.	Графіки функцій, що приймають нульове значення на прямокутнику, та проєкції ліній рівня (еквіпотенціалей) цих графіків, які "спираються" на прямокутник	16
1.2.	Опорні області функцій $F_1(x)$ і $F_2(x)$ (на координатній осі показані потовщеними відрізками): $a$ – при додаванні; $b$ – при множенні	19
1.3.	Опорні області функцій $F_1(x)$ і $F_2(x)$ : $a$ – при $R$ -диз'юнкції; $b$ – при $R$ -кон'юнкції	20
1.4.	Приклад плоского геометричного об'єкта	25
1.5.	Послідовні етапи застосування логічних формул для плоского геометричного об'єкта	26
1.6.	Приклад об'єкта, для опису якого необхідно мати додаткову опорну область	27
1.7.	Приклад просторового геометричного об'єкта	28
1.8.	Етапи застосування логічних формул для опису просторового геометричного об'єкта	29
1.9.	Приклад геометричного об'єкта, поверхня якого складається з фрагментів тора, циліндричної та призматичної поверхонь	31
2.1.	Криві, що описано формулами (2.1) і паралельні до астроїди	33
2.2.	Вектори швидкостей у точках неізотропного, неоднорідного середовища	36
2.3.	Обвідна хвильових фронтів	36
2.4.	Напрямок променя і напрям руху фронту	38
2.5.	Спряжена гіперплощина	38
2.6.	Спряженість напрямів променя і фронту	39
2.7.	Характеристики для розв'язання задачі Коші рівняння Гамільтона – Якобі	41
2.8.	Відбиття від плоскої лінії	47
2.9.	Кути заломлення	47
2.10.	Схема загального підходу до розв'язання задач геометричного моделювання еквіфазних поверхонь	52

2.11. Метод поточкового перенесення	53
2.12. Метод "evolюти – evolвенти"	55
2.13. Метод обвідної сім'ї кіл	56
2.14. Метод тангенціального рівняння	56
2.15. Метод суми Мінковського	57
2.16. Приклади поверхонь 2 і 3, паралельних початковій поверхні $1 z = 0,7(1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2})$ : $a - h = 3$ ; $b - h = 5$	60
2.17. Пари поверхонь, паралельних поверхні "півкулі"	62
2.18. Приклади квазіпаралельних кривих	63
2.19. Поверхня однакового нахилу для циклоїди $x = t - \sin t$ ; $y = 1 - \cos t$ : $a$ – аксонометричне зображення; $b$ – проекція на площину $z = 0$	65
2.20. Паралельні криві для циклоїди $x = t - \sin t$ ; $y = 1 - \cos t$	66
2.21. Конус Монжа	68
2.22. Графік функції наближеного розв'язку рівняння (2.52), коли граничною кривою є парабола $y = x^2$	70
2.23. Графік функції точного розв'язку рівняння (2.52), коли граничною кривою є парабола $y = x^2$	71
2.24. Лінії рівня для точного ( $a$ ) і наближеного ( $b$ ) розв'язків	71
2.25. Поверхня, паралельна до поверхні куба	72
3.1. Графік нормальної функції для першого відрізка	77
3.2. Графік нормальної функції для другого відрізка	78
3.3. Різні ракурси графіка $G_{max}$ нормальної функції фігури перетину відрізків ( $b$ – вид "знизу")	78
3.4. Різні ракурси графіка $G_{min}$ нормальної функції фігури об'єднання відрізків ( $b$ – вид "знизу")	78
3.5. Лінії, паралельні фігурі об'єднання двох відрізків	79
3.6. Сумісне зображення двох графіків нормальних функцій відрізків і графіка їх $R$ -диз'юнкції (виділено)	80
3.7. Вигляд графіків нормальних функцій відрізків і графіка їх $R$ -диз'юнкції у напрямі осі $Oy$	80
3.8. Поверхня рівня нормальної функції паралелепіпеда: $a - \xi = 0,05$ ; $b - \xi = 1,5$	81
3.9. Поверхні рівня нормальних функцій для відрізка і паралелепіпеда: $a - \xi = 1$ ; $b - \xi = 2$	82
3.10. Перетин поверхонь рівня: $a - \xi = 2,1$ ; $b - \xi = 1,9$	83
3.11. Криві, паралельні до еліпса	83



3.12. Лінії, паралельні до кардіоїди	84
3.13. Графік нормальної функції параболі $y=x^2$ , записаної за допомогою радикалів	87
3.14. Криві, які паралельні (еквідистантні) до параболі	87
3.15. Графік нормальної функції синусоїди	88
3.16. Криві, які паралельні (еквідистантні) до синусоїди	89
3.17. Графік нормальної функції еліпса	90
3.18. Криві, які паралельні (еквідистантні) еліпсу	90
3.19. Дві поверхні, паралельні до параболоїда $\{x=u \cos v; y=u \sin v; z=u^2/2\}$ для гіперплощини $\xi=1,2$	93
3.20. Дві поверхні, паралельні до гіперболічного параболоїда $\{x=u \operatorname{ch} v; y=u \operatorname{sh} v; z=u^2/2\}$ для гіперплощини $\xi=0,5$	94
3.21. Дві поверхні, паралельні до еліпсоїда $\{x=2 \sin u \cos v; y=2 \sin u \sin v; z=\cos u\}$ для гіперплощини $\xi=0,5$	95
3.22. Дві поверхні, паралельні до конуса $\{x=u \cos v; y=u \sin v; z=u\}$ для гіперплощини $\xi=2$	95
3.23. Дотична та нормаль еліпса	97
3.24. Лінії рівня графіка нормальної функції багатокутника	99
3.25. Графік нормальної функції багатокутника	99
3.26. Опорні області для опису нормальної функції дуги кола	101
3.27. Графік нормальної функції дуги кола за першим способом: $a$ – лінії рівня; $b$ – аксонометричне зображення графіка	102
3.28. Графік нормальної функції дуги кола за другим способом: $a$ – лінії рівня; $b$ – аксонометричне зображення графіка	102
3.29. Сім'ї кривих, паралельних до правої частини еліпса при $a=3; b=2$	103
3.30. Графік нормальної функції еліпса при $a=3; b=2$	104
3.31. Сім'ї кривих, паралельних до правої частини еліпса при $a=2; b=3$	104
3.32. Графіки нормальної функції еліпса при $a=2; b=3$	104
3.33. Графік нормальної функції еліпса при $a=3; b=2$	105
3.34. Сім'ї кривих, паралельних до еліпса при $a=3; b=2$	106
3.35. Графік нормальної функції астроїди (вид знизу)	106
3.36. Сім'я кривих, паралельних до астроїди	106
3.37. Сім'я кривих, паралельних до "половини" астроїди	107
4.1. Замкнута ламана, що обмежує $n$ -кутник	115
4.2. Результат роботи програми у прикладі 4.1	117

4.3.	Результат роботи програми у прикладі 4.2	118
4.4.	Приклади результатів відображень на внутрішні області правильних $n$ -кутників	119
4.5.	Приклади результатів відображень на зовнішні області правильних $n$ -кутників	120
4.9.	Приклад правильного десятикутника	121
4.10.	Квазіпаралельні криві всередині десятикутника залежно від степеня $N$ розкладу в ряд Тейлора	122
4.11.	Квазіпаралельні криві зовні десятикутника залежно від степеня $N$ розкладу в ряд Тейлора	123
4.12.	Кути, що визначають форму десятикутника	125
4.13.	Результат виконання програми наближеної побудови конформного відображення на внутрішню область десятикутника	125
4.14.	Результат виконання програми наближеної побудови конформного відображення на зовнішню область десятикутника	126
4.15.	Тест відображення кола на "профіль крила Жуковського"	126
4.16.	Схема фільтрації під серединним перерізом греблі	127
4.17.	Схема фільтрації під флютбетом греблі зі шпунтом	130
4.18.	Приклади відображень за допомогою функції $w(t) = -i\sqrt{1-t^2}$ в геометричному моделюванні фільтрації під флютбетом греблі залежно від значень $p_1$ і $p_2$ : $a - p_1 = 0$ і $p_2 = 1,5$ ; $b - p_1 = -0,1$ і $p_2 = 0,1$ ; $v - p_1 = -1,5$ і $p_2 = 2$	130
4.19.	Геометричне моделювання течії в прямому каналі з "ширмами" ( $w(t) = -i \arcsin t$ , $p_1 = -0,6$ і $p_2 = 0,8$ )	130
4.20.	Моделювання фільтрації рідини в каналі з розривом ( $w(z) = cz + h \ln(z+1) - \ln(z-1)$ , $c = 1$ і $h = 1,4$ )	131
4.21.	Графіки функцій $\phi$ і $\psi$ з виразу (4.18) при $Q = 10$	133
4.22.	Графіки функцій $\phi$ і $\psi$ з виразу (4.20) при $\Gamma = 5$	134
4.23.	Еквіпотенціалі вихору як лінії рівня графіку функції $\phi$ при $Q = 10$ і $\Gamma = 5$	135
4.24.	Лінії струменів як лінії рівня функції $\psi$ при $Q = 10$ і $\Gamma = 5$	135
4.25.	Просторовий графік функції $W(z)$ і силові лінії вихору	136
4.26.	Просторовий графік функції $\text{Re}W(z)$ і силові лінії вихору	136
4.27.	Просторовий графік функції $\text{Im}W(z)$ і силові лінії вихору	137

---

4.28. Схеми фільтрації: $a$ – під греблею з "півеліптичним" флютбетом; $b$ – під греблею зі шпунтовим флютбетом ( $a = 0$ ); $v$ – під греблею з плоским флютбетом ( $b = 0$ )	138
4.29. Графік функції $W(z)$ для моделювання ізобар і ліній струменів під "еліптичним" флютбетом	139
4.30. Графік функції $\operatorname{Re} W(z)$ для моделювання ізобар під "еліптичним" флютбетом	139
4.31. Графік функції $\operatorname{Im} W(z)$ для моделювання ліній струменів під "еліптичним" флютбетом	140
4.32. Графік функції $W(z)$ для моделювання ізобар і ліній струменів під плоским флютбетом	140
4.33. Графік функції $\operatorname{Re} W(z)$ для моделювання ізобар під плоским флютбетом	141
4.34. Графік функції $\operatorname{Im} W(z)$ для моделювання ліній струменів під плоским флютбетом	141
4.35. Графік функції $W(z)$ для моделювання ізобар і ліній струменів під шпунтовим флютбетом	142
4.36. Графік функції $\operatorname{Re} W(z)$ для моделювання ізобар під шпунтовим флютбетом	142
4.37. Графік функції $\operatorname{Im} W(z)$ для моделювання ліній струменів під шпунтовим флютбетом	143
4.38. Приклади відображень $w = \sqrt[q]{z^p}$	147
4.39. Приклади відображень для різних функцій відображень	148
4.40. Етапи відображення $\operatorname{Im} z > 0$ на "сходинку"	149
4.41. Приклади відображень на ламану-"сходинку"	150
4.42. Деформація зображення зі смугами	151
4.43. Деформація зображення з кольоровими зонами	151
5.1. Приклад контурів, які апроксимовано багатокутниками	154
5.2. Позначення на абстрактному контурі для запису його логічної формули	155
5.3. Сплайн як локальний поліном третього степеня	160
5.4. Варіанти екстраполяції методом "нарощування" кількості точок	161
5.5. Варіанти екстраполяції методом "переносу" точок	162
5.6. Порівняння поліноміальної та сплайн-інтерполяції	163
5.7. Некоректний результат використання сплайн-інтерполяції	163

---

5.8. Сім'я інтерпольованих кривих	166
5.9. Сім'я екстрапольованих кривих	166
5.10. Сім'я інтерпольованих квазіпаралельних кривих	167
5.11. Сім'я екстрапольованих квазіпаралельних кривих	168
5.12. Різні ракурси поверхні однакового нахилу до прикладу 5.3	168
5.13. Результати "трилінійної" екстраполяції з вузловими елементами "ромб – коло – квадрат": $a$ – поліноміальна екстраполяція; $b$ – сплайн-екстраполяція	170
5.14. Схема побудови послідовності векторів	173
5.15. Приклади екстраполяції "лінійної" функції: $a - k = 0$ ; $b - k = 2$ ; $v - k = 5$ ; $z - k = -2$	174
5.16. Приклади екстраполяції "параболічної" функції: $a - k = 0$ ; $b - k = 2$ ; $v - k = 5$ ; $z - k = -2$	175
5.17. Приклади екстраполяції для вихідних контурів "коло – три квадрати": $a - k = 0$ ; $b - k = 2$ ; $v - k = -2$ ; $z - k = -5$	177
5.18. Результати екстраполяції в залежності від $k$ : $a$ – вузлові контур; $b$ – екстраполяція при $k = 3$ ; $v$ – екстраполяція при $k = 0$ ; $z$ – екстраполяція при $k = -3$	179
5.19. Контур, які одержано в результаті зйомки зображень	182
5.20. Перший контур	185
5.21. Другий контур	185
5.22. Третій контур	188
5.23. Четвертий контур	188
5.24. Екстраполяція при $k = -2$ (початкова фаза)	189
5.25. Екстраполяція при $k = 0$ (середня фаза)	189
5.26. Екстраполяція при $k = 2$ (прикінцева фаза)	190
5.27. Приклад результату екстраполяції (зовнішній контур)	192
5.28. Графік функції $k = k(x, y)$	192
6.1. Приклад побудови геодезичної регулярної поверхні	195
6.2. Приклад побудови геодезичних "методом пострілів"	195
6.3. Приклади побудови поверхні і геодезичної лінії на цій поверхні залежно від крайових умов	197
6.4. Приклад побудови геодезичної за чисельним алгоритмом: $a$ – конструктивні елементи алгоритму; $b$ – результат побудови	199
6.5. Умовний "пагорб"	200

---

6.6. Приклади зображень геодезичних ліній на поверхні $f = \sin(x/1,5) \cdot \sin(y/1,5)$	203
6.7. Приклади зображень геодезичних ліній на поверхні $f = 4\sin(x/2) \cdot \cos(3y/5) + 2\sin(x) \cdot \cos(y)$	204
6.8. Приклад траси	206
6.9. Еквідистантидо кривої (6.10): $a$ – зовнішні; $b$ – сумісні з внутрішніми	207
6.10. Різні ракурси графіка функції (6.11)	208
6.11. Графіки функцій $z=f_1(x, y)$ і $z=f_2(x, y)$	209
6.12. Графік $R$ -диз'юнкції $f_1 \vee f_2$	209
6.13. Перерізи графіків функцій площиною, що проходить через точку мінімуму $R$ -диз'юнкції	209
6.14. Приклад прямокутників та гістограми, побудованої в точках екстремуму	210
6.15. Топографічна схема місцевості після аварії	211
6.16. Графік функції потенціалу, побудованої на топографічній схемі	212
6.17. Мнемонічна схема побудови віртуальної потенціальної функції	213
6.18. Графік і лінії рівня потенціальної функції притягання	214
6.19. Графік і лінії рівня потенціальної функції відштовхування	214
6.20. Приклади потенціальних функцій: $a$ – ціль знаходиться за перепонами; $b$ – ціль знаходиться між перепонами	215
6.21. Тестові приклади побудови траси переміщення робота: $a$ – обхід однієї перепони; $b$ – складний обхід двох перепон; $v$ – трасування руху робота в автоматичному режимі	216
6.22. Приклад комірок Бенара	218
6.23. Принцип формоутворення комірок Бенара	218
6.24. Стиснення первісної області невизначеності 1 в часі у випадку, коли цикл $\Gamma$ є стійким граничним режимом	221
6.25. Різні ракурси еліпсоїда, в який деформувалася куля за час $T$	224
6.26. Ляпуновські еліпсоїди для "класичних" ( $a$ ) та "інших" ( $b$ ) наборів вхідних параметрів системи Лоренца	225
6.27. Сім'я параболоїдів, повернутих навколо осі $Oy$	229
6.28. Обвідна сім'ї параболоїдів, повернутих навколо осі $Oy$	229

6.29. Два "крайні" розташування половинок параболоїда обертання	231
6.30. Складові елементи очікуваної форми відбивача: 1 – фрагмент початкового параболоїда обертання при $t = t_{\text{MIN}}$ ; 2 – фрагмент початкового параболоїда обертання при $t = t_{\text{MAX}}$ ; 3 – обвідна параметричної сім'ї конфокальних параболоїдів обертання	232
6.31. Аксонометричне зображення відбивальної поверхні	232
6.32. Зображення ревербератора, кінець якого рухається по колу	235
6.33. Приклад дифракції автохвиль на перешкоді	238
6.34. Приклади одорукавної та дворукавної автохвиль	238
6.35. Приклади взаємодії двох автохвильових процесів	239
6.36. Деякі зображення етапів розвитку процесу збурення	242

## ПЕРЕДМОВА

Книгу призначено для студентів і аспірантів закладів вищої освіти, які здобувають освіту за технічними та ІТ спеціальностями. До неї включено розділи дисциплін "Геометричне моделювання об'єктів, явищ і процесів" і "Проблеми геометричного моделювання об'єктів, явищ і процесів".

Кожна з математичних дисциплін, що вивчається в технічному закладі вищої освіти, повинна дати майбутньому фахівцю геометричний апарат, з допомогою якого можна розв'язувати різні технічні задачі. Апаратом геометричного моделювання є методи формування і опису геометричних моделей існуючих або задуманих об'єктів реального світу. Як і кожна модель, геометрична модель дозволяє вивчати властивості об'єкта, що моделюється, та розв'язувати задачі, які відносяться до цього об'єкта.

Розвиток методів прикладної геометрії спрямовується на побудову універсальних геометричних моделей. Тому виникає потреба у пошуках можливостей реалізації переходу від одного методу до іншого в межах єдиного розгляду. Для візуалізації формування геометричних об'єктів доцільно займатись створенням наскрізного інформаційного забезпечення. Все це може розширити коло задач, де ефективним буде використання математичного апарата прикладної геометрії.

Зміст геометричного моделювання як самостійної структури в її сучасному вигляді суттєво збагатився в результаті притоку нових математичних ідей, встановлення зв'язків з новими галузями науки, наприклад, – з теорією інформації, кібернетикою та ін. Одним з найбільш суттєвих понять сучасного геометричного моделювання, яке виникло і досліджується на вказаній основі, є поняття про моделі геометричного простору. У зв'язку з новітніми поглядами на геометричні моделі та з радикальними змінами в процесах дослідження, проектування і конструювання технічних об'єктів майже всюди виникає необхідність у доповненні змісту навчальних дисциплін розділами, присвяченими опису та візуалізації геометричних моделей об'єктів.

Відповідно до підходів та методів опису формоутворення геометричних об'єктів, які пропонуються для вивчення здобувачам вищої освіти, посібник поділено на розділи, в яких розглядається сутність геометричного моделювання просторових об'єктів, графічне подання розв'язків задач, можливе застосування геометричних моделей в науково-практичних задачах різних галузей.

Треба окремо зазначити, що геометричні методи прийнятні для моделювання певних класів задач, хоча ці задачі можуть належати до різних науково-технічних галузей. Серед таких задач можна назвати: моделювання і прогнозування фронтів поширення лісових пожеж, моделювання розподілу енергетичних параметрів у газорозрядних джерелах світла, побудову картин розподілу параметрів (концентрацій, тисків тощо) у пластах газонафтових родовищ, моделювання картин полів фільтрації під гідротехнічними спорудами, моделювання збурень в активних середовищах, визначення стану поведінки динамічних систем, моделювання поверхонь за заданими характеристиками у відбивальних системах та ін.

Робота зі складання навчального посібника розподілена між авторами таким чином: розділи 3, 6 написані професором Л. М. Куценком; "Передмова", "Вступ", розділи 2, 5 – професором О. В. Шоман; розділи 1, 4, список джерел інформації написані разом.

Під час роботи над посібником велику допомогу авторам надали рецензенти – професор Ю. М. Тормосов і професор О. М. Соболев. Автори щиро вдячні названим ученим за доброзичливі критичні зауваження, що поліпшили зміст книги.

Окрему подяку за сприяння підготовці посібника автори висловлюють професору Є. І. Соколу – ректору НТУ "ХПІ".

Відгуки та побажання можна направляти за адресою: кафедра геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002, Україна.



## ВСТУП

Сучасна тенденція підвищення якості науково-технічного забезпечення будь-якої галузі виробництва в Україні набуває все більшого розвитку. Таке забезпечення, по-перше, має розроблятися швидкими темпами, по-друге, повинно мати гнучку структуру і, по-третє, – відповідати рівню інформаційних технологій, що стрімко розвиваються.

В нинішніх реаліях важливою є проблема моделювання об'єктів, які пов'язані з видобутком, передачею та використанням енергії. Йдеться про явища і процеси різної фізичної природи, поля яких є носіями енергетичних параметрів. Другою важливою проблемою є прогнозування тенденцій розвитку явищ і процесів, що характеризуються хвильовими фронтами. До таких об'єктів належать лісові пожежі, гетерогенні хімічні реакції, збурення в різних середовищах, автохвильові процеси тощо. Вирішенню зазначених проблем сприяє застосування методів прикладної геометрії, тому що саме вона дозволяє вибудовувати загальні підходи до вивчення, на перший погляд, різнорідних явищ.

Геометричне моделювання складних за формою об'єктів як елементів параметричної сім'ї кривих ліній та поверхонь належить до одного з головних і перспективних напрямків розвитку прикладної геометрії. Методи і засоби прикладної геометрії дозволяють розглядати з єдиних позицій споріднені за змістом задачі моделювання явищ і процесів. Один із загальних підходів до вирішення проблем аналізу, синтезу та оптимізації геометричних моделей явищ і процесів базується на понятті узагальнених паралельних множин, кожний елемент яких (наприклад, лінія чи поверхня) відповідає певним характеристикам явища або процесу, що моделюється.

До задач, які підлягають розгляду з позицій теорії паралельних множин, слід віднести моделювання фронтів поширення збурень у середовищі, поверхонь розділення фаз перебігу фізичних явищ і процесів та створення геометричних моделей картин силових ліній полів різної природи (електричних, теплових, гідродинамічних

та ін.). В свою чергу, опис граничних поверхонь тісно пов'язаний з проблемами визначення кількісно-якісних характеристик передачі енергії у просторі.

В прикладній геометрії важливими є проблеми формування складних двовимірних і тривимірних геометричних об'єктів. Слід вирішити дві проблеми, для вирішення яких доцільно застосовувати геометричний апарат моделювання. Це, по-перше, проблема аналізу та оптимізації умов перебігу процесу (явища), і, по-друге, – проблема прогнозування характеру й умов розвитку процесу (явища).

Наочною картиною фізичного поля з позицій прикладної геометрії є сітка ліній або низка поверхонь, які можна інтерпретувати, наприклад, як графіки зміни фізичних параметрів поля в часі або розподіли цих параметрів у просторі на визначений момент часу. Ці лінії та поверхні характеризують певні фази розвитку фізичного процесу, тобто є еквіфазними. На геометричну форму сім'ї еквіфазних ліній або поверхонь впливають, перш за все, енергетичні параметри.

Навчальний посібник містить відомості про формування геометричних моделей тривимірного простору. В ньому розглянуто математичні основи розв'язання задач геометричного моделювання, подано інформацію про формування в задачах моделювання об'єктів, явищ і процесів, пояснено реалізацію методів і способів прикладної геометрії. В кожному розділі показано застосування геометричних підходів до розв'язання наукових та інженерних задач стосовно різних впроваджень. Останні розділи посібника присвячено впровадженням методів і засобів анімаційного моделювання для різних класів задач. В розділах наведено приклади, що полегшують сприйняття наданих відомостей.

Матеріал навчального посібника спрямований для підготовки аспірантів і студентів закладів вищої освіти. Він буде корисним також науково-педагогічним та інженерно-технічним працівникам.

# РОЗДІЛ 1.

## АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ЯК ОСНОВА ФОРМУВАННЯ ПРОЄКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Геометрична форма є визначальною в дослідженнях переважної більшості явищ і процесів. Зазвичай дослідження проводяться із залученням комп'ютерної техніки та з використанням аналітичного опису геометричної інформації. Такий опис може забезпечуватися математичним апаратом  $R$ -функцій (теорію  $R$ -функцій розробив академік В. Л. Рвачов). Використання  $R$ -функцій в алгоритмах растрової комп'ютерної графіки дозволяє виконувати проєкційні зображення геометричних об'єктів, які задано аналітичними рівняннями.

Відомості цього розділу присвячені одному з важливих застосувань теорії  $R$ -функцій – застосуванню  $R$ -функцій для опису геометричних об'єктів рівняннями в неявному вигляді. У практиці геометричного моделювання широко розвинуто підхід, оснований на поданні елементів теорії  $R$ -функцій мовою геометричних образів. Очільником цього напрямку в прикладній геометрії і автором багатьох науково-практичних здобутків став професор Л. М. Куценко.

Матеріал, що викладено в розділі, базується на роботах В. Л. Рвачова, Л. М. Куценка та їх учнів.

### **1.1. Сутність опису геометричного об'єкта за допомогою аналітичного рівняння**

Відомою є велика кількість інженерних розробок, в яких ефективність того чи іншого виробу істотно залежить від його геометричної форми (крило літака, зубчасте колесо, будівельне перекриття тощо). Варіюючи формою поверхонь цих виробів можна, майже не вкладаючи кошти, поліпшувати їхні експлуатаційні характеристики. Але виникає питання – в "який бік" здійснювати варіювання? З огляду на сучасний рівень вимог до виробів, раціональне рішення можна знайти лише після відповідних розрахунків.

Проблема розрахунку виробу в першу чергу пов'язана з описом, зберіганням і обробкою графічної інформації, що характеризує просторову форму цього виробу. Тому розробник алгоритмів і програм повинен володіти різноманітними способами моделювання геометричної інформації. Одним з таких способів є *аналітичне моделювання*, тобто опис геометричного об'єкта (ГО) за допомогою рівняння. Далі будемо розглядати переважно рівняння у неявній формі.

В основі опису ГО за допомогою рівняння покладено метод координат, який ввели в науку французькі математики П. Ферма і Р. Декарт. Можливість методу координат виражати геометричні поняття мовою алгебри сприяла появі цілого "феєрверка" рівнянь. Але знайомство з будь-яким математичним довідником переконує у тому, що геометричними образами цих рівнянь, за рідкісним винятком, є *множини точок, розташованих відповідно до деякої закономірності* (еліпс, циклоїда, кардіоида тощо).

Логічними стають запитання: чи є можливим описати у вигляді рівняння довільний ГО, тобто чи є можливим скласти алгоритм побудови функції (лівої частини рівняння), що мала б нульові значення в точках заданого ГО, і якими математичними способами здійснити таку побудову?

В середині ХХ ст. американський математик Х. Уїтні довів теорему, з якої, зокрема, випливає: *множині точок, з яких складається у просторі деякий ГО, можна поставити у відповідність функцію, що має нульові значення у точках цієї множини*. Більше того, для кожного ГО існує така функція, яка буде диференційованою довільну кількість разів. На перший погляд, це парадоксальний результат: виявляється, що, наприклад, трикутник можна описати за допомогою гладкої функції (тобто функції із гладким графіком). Геометрично це означає, що в результаті перетину координатної площини з гладкою поверхнею (згаданого графіка) можна одержати негладкий ГО (трикутник). Теорема Уїтні має фундаментальне значення, а для практичної побудови такої функції потрібні конструктивні математичні способи.

Запити практики викликали появу різних способів конструювання рівнянь, що орієнтовані на конкретний клас ГО. Інші способи просто зводилися до фрагментарного опису об'єкта набором взаємозалежних рівнянь.

---

Із загальних позицій розглянути проблему опису ГО рівнянням вдалося українському математику В. Л. Рвачову. Створена ним теорія  $R$ -функцій надала в розпорядження дослідника математичний апарат ( $R$ -функції), який дозволяє конструювати рівняння ГО практично довільної просторової форми. Звичайно, при цьому не йдеться про опис, наприклад, машинобудівних креслеників у вигляді громіздкого формульного запису. Йдеться про можливість створення алгоритму складання рівняння ГО з необхідними властивостями, накладеними на функцію в лівій частині цього рівняння. Зазначений алгоритм призначається для реалізації на сучасних комп'ютерах. Велика кількість операцій у такому алгоритмі обчислення функції не відіграє вирішальної ролі. Крім того, можна формалізувати деякі поняття, що характеризують конфігурацію ГО. Далі будуть наведені такі поняття (ними є опорні області функцій, які входять до опису фрагментів вихідного ГО).

## **1.2. Зміст поняття функції**

Перш ніж вести розмову про  $R$ -функції, стисло нагадаємо, який зміст вкладають у термін "функція", а також обумовимо деякі геометричні об'єкти, супутні цьому поняттю. Акцент буде зроблено на можливості подати графік функції шляхом "вільного руху руки". Здійснення цієї вимоги дозволяє геометрично пояснити алгоритм складання ГО за допомогою  $R$ -функцій.

Термін "функція" було введено німецьким математиком Г. Лейбніцем. Однак поняття функціональної залежності як залежності між змінними величинами зустрічається в більш ранніх роботах французького математика Р. Декарта. З часом зміст, вкладений у поняття функції, змінювався. Це пояснювалось успіхами диференціального й інтегрального числення. Пошуки нових об'єктів для диференціювання й інтегрування призвели до того, що на передній план стали виступати функції, які задаються за допомогою аналітичних виразів. Тому до початку XVIII ст. сформувався погляд на функцію як на аналітичний вираз. Відповідно до такого розуміння, крива, яку накреслено "вільним рухом руки", не є графіком функції.

У той же час багато математиків розуміли, що ототожнення функції з аналітичним виразом значно звужує коло впроваджень математичного аналізу. Крім того, не давало спокою питання: чи можна ту ж саму функцію задавати різними аналітичними виразами? Позитивна відповідь на це питання надійшла в результаті розгляду функцій у вигляді нескінченних сум, які можна скласти (наприклад, сума членів ряду геометричної прогресії, що нескінченно убуває). Інакше кажучи, дві аналітично не схожі функції виявляються рівноправними. У роботах Ж. Лагранжа вивчалися функції, які можна подати степеневими рядами. Згодом такі функції були названі аналітичними й широко використовувалися в диференціальному численні. Мабуть, головним результатом, отриманим у той час, була формула англійського математика Б. Тейлора. З формули, зокрема, випливало, що, маючи у своєму розпорядженні аналітичну функцію на будь-якому малому інтервалі, можна знайти її значення в кожній точці області визначення. Цей висновок заперечував трактування функції, графік якої є результатом "вільного руху руки". Дійсно, задавши аналітичну функцію на деякому інтервалі, вже неможливо впливати на її значення поза цим інтервалом, тобто аналітично продовжити функцію можна єдиним чином.

Інша справа, якщо розглядати нескінченні суми, відмінні від степеневих рядів. На початку XIX ст. французький математик Ж. Фур'є показав, що кожна функція, графік якої може бути накреслений "вільним рухом руки" (тобто кожна неперервна кусково-гладка функція), подається у вигляді нескінченного тригонометричного ряду. Отже, найбільш вражаючим відкриттям Фур'є було те, що криві, накреслені "вільним рухом руки", виявилися такими, які можна подати аналітично. Знову в основу поняття функції було покладено поняття залежності між змінними величинами.

Ґрунтуючись на цьому, два математики – росіянин М. І. Лобачевський і німець Л. Діріхле – незалежно один від одного запропонували таке означення функції: "*Функцією* називають будь-який закон відповідності між змінними величинами, коли одній з них (її називають *аргументом* функції та позначають  $X$ ) ставлять у відповідність єдину іншу (її називають *значенням* функції та позначають  $Y$ ). Символічно функціональну залежність умовилися записувати у вигляді

---

ді  $Y=F(X)$ . Тут  $F$ , з одного боку, позначає цю залежність, а з іншого боку,  $F$  – це значення функції, що відповідає аргументу  $X$ .

Ключовим словом у наведеному означенні є слово "єдина". Надалі це необхідно мати на увазі, оскільки в математиці є відомими й "неоднозначні" функції (наприклад, функції комплексного змінного, в яких значення у деякій точці комплексної площини залежить від шляху, по якому потрапляють у цю точку: різні шляхи можуть привести до різних значень функції в цій точці). Геометричний образ графіків таких (голоморфних) функцій прийнято називати поверхнями Б. Рімана. Функції з подібними властивостями в розділі не розглядатимуться.

Близьким до наведеного означення функції є сучасне поняття алгоритму.

*Алгоритмом* прийнято називати систему правил, що призводять до шуканого результату через кінцеву кількість кроків.

Зазначимо, що не для будь-якої функції можна побудувати графік через "технічні" причини. Класичний приклад – функція Діріхле, що дорівнює одиниці, якщо  $X$  – раціональне число, і нулю, якщо  $X$  – ірраціональне число. Подібні функції також виключено з подальшого розгляду.

Поняття функції узагальнюється за умови, що аргументи функції не приймають числові значення. Як аргумент функції будемо використовувати деяку функцію (або сукупність функцій), утворивши тим самим конструкцію, яку прийнято називати *суперпозицією функцій*.

Нехай задано набір  $H$  деяких елементарних функцій. Тоді функція, яку побудовано за допомогою суперпозиції функцій з цього набору, називається  $H$ -реалізованою.

Після використання операції суперпозиції функцій результатом буде подано у формі "*єдиного аналітичного виразу*".

### 1.3. Геометричні характеристики функції

Одним з головних понять математики є функція. Зазвичай цей термін асоціюється з рисунком, на якому зображені дві осі координат і деяка лінія – графік функції. У цілому таке подання є правильним.

---

Однак його слід уточнити, виходячи з визначення функції в сенсі Діріхле – Лобачевського.

Функцією називають правило (закон, алгоритм), яке ставить у відповідність припустимому значенню деякої змінної величини (або декільком змінним величинам) *єдине* значення функції; при цьому змінна величина має належати певній області її значень, які забезпечують існування функції.

Функцію позначають символічною конструкцією вигляду  $y=F(x)$ . При цьому в дужках умовилися вмещувати змінну величину  $x$  (змінних може бути дві, три і більше). Належність змінної певній області позначається у вигляді  $x \in G$ . Символом  $F$  "закодовано" те саме правило, що фігурує в означенні функції. Через  $y$  позначено значення функції.

**Приклад 1.1.** Функція  $y=x^2$  є функцією однієї змінної. Правило у цьому випадку формулюється таким чином: поставити у відповідність значенню  $x$  (точці осі  $Ox$ ) єдине дійсне число, що дорівнює його квадрату. Тут  $x$  – змінна величина,  $y$  – значення функції,  $x^2$  – позначення правила.

**Приклад 1.2.** Функція  $z = 1 - x^2 - y^2$  є функцією двох змінних. Вона ставить у відповідність кожній парі чисел  $(x, y)$  (точці площини  $Oxy$ ) єдине дійсне число, що обчислюється за формулою  $z = 1 - x^2 - y^2$ . Тут  $x$  і  $y$  – змінні величини,  $z$  – значення функції. Правило при цьому буде таким: для одержання значення функції необхідно від одиниці по черзі відняти значення квадратів змінних величин.

**Приклад 1.3.** Функція  $t = 4 - x + 3y - 5z$  є функцією трьох змінних. Вона ставить у відповідність трійці чисел  $(x, y, z)$  (точці тривимірного простору  $Oxyz$ ) єдине дійсне число, яке отримано з формули  $t = 4 - x + 3y - 5z$ . Тут  $x, y$  і  $z$  – змінні величини,  $t$  – значення функції.

Розглянемо деякі геометричні характеристики функції.

До поняття графіка функції приходять шляхом таких міркувань. Нехай задана функція однієї змінної  $y=F(x)$ . Побудуємо перпендикуляр до осі  $Ox$ , що проходить через точку осі, яка відповідає

---



деякому значенню змінної  $x$ . На цьому перпендикулярі відкладемо (з урахуванням знака) відрізок, довжину якого виберемо рівною значенню функції  $F$  у точці  $x$ . Нехай  $x$  пробігає всю область значень змінної величини. Тоді геометричне місце кінців усіх перпендикулярів буде графіком функції  $y = F(x)$ .

*Графіком функції однієї змінної  $y = F(x)$  називають у системі координат  $Oxy$  множину точок з координатами  $(x, F(x))$ .*

**Приклад 1.4.** Графіком функції  $y = x^2$  є парабола.

Нехай маємо функцію двох змінних  $z = F(x, y)$ . Побудуємо перпендикуляр до площини  $Oxy$ , що проходить через точку площини, яка відповідає деякому значенню пари змінних  $(x, y)$ . На цьому перпендикулярі відкладемо (з урахуванням знака) відрізок, довжина якого дорівнює значенню функції в точці з координатами  $(x, y)$ . Нехай точка  $(x, y)$  пробігає всю область значень змінних. Тоді геометричне місце кінців усіх перпендикулярів буде графіком функції  $z = F(x, y)$ .

*Графіком функції двох змінних  $z = F(x, y)$  називають у системі координат  $Oxyz$  множину точок з координатами  $(x, y, F(x, y))$ .*

**Приклад 1.5.** Графіком функції  $z = 1 - x^2 - y^2$  буде відомий з аналітичної геометрії параболоїд обертання.

Наочне подання графіка функції трьох і більше змінних зроби-ти складно. Тому зазвичай звертаються до абстракції та говорять, що графіком функції трьох змінних  $t = 1 - 2x + 3y - z$  є гіперплощина у чотирирівимірному просторі.

*Локусом ("локальним куском") функції називають множину точок з області значень незалежних змінних, в яких функція тотожно дорівнює нулю.*

Поняття локусу узагальнює такі графічні поняття як крива на площині та поверхня у просторі. Зазначимо, що раніше замість терміна "локус" часто використовували термін "кресленик функції".

**Приклад 1.6.** Локусами функцій  $y = x^2$  і  $z = 1 - x^2 - y^2$  будуть, відповідно, початок осі координат (тобто точка) і коло одиничного радіуса з центром у початку координат.

Локус функції описується виразом, який прийнято називати *рівнянням*.

**Приклад 1.7.** Рівняннями початку осі координат (точки) і кола одиничного радіуса з центром у початку координат будуть, відповідно,  $x^2 = 0$  і  $1 - x^2 - y^2 = 0$ .

*Зауваження.* Локус можна описати і нерівністю вигляду  $|F(x, y)| \geq 0$ .

Геометрично локус функції являє собою спільні точки графіка функції і області значень її змінних.

*Опорною областю функції* називають множину точок з області значень змінних, у яких функція приймає невід'ємне значення. Опорна область містить у собі і локус тієї ж функції.

Опорну область прийнято описувати нерівністю вигляду  $F(x, y) \geq 0$ . Однак опорну область можна описати і рівнянням  $F(x, y) - |F(x, y)| = 0$ . Докладніше про це буде сказано далі.

Наведені приклади функцій показують, що області значень незалежних змінних функцій зручно трактувати геометрично і подавати їх ділянками або осі  $Ox$ , або площини  $Oxy$ , або простору  $Oxyz$ .

Вигляд опорної області (і локусу) функції істотно залежить від розмірності простору, що включає область припустимих значень змінних. У табл. 1.1 наведено опорні області і локуси деяких функцій.

Локус – це саме той геометричний об'єкт, опис якого становить інтерес для фахівця. Зазначимо, що в означеннях ніде не були накладені обмеження на просторову складність локусів функції. Дійсно, графік функції може бути настільки "екзотичним", що її локус буде практично збігатися з кожним заздалегідь заданим графічним образом. Геометрично це можна проілюструвати таким чином: графік функції може прийняти таку просторову форму, що його точки, які є спільними з областю значень змінних функції, збігатимуться практично з довільним локусом.

У цьому і криються корені для реального встановлення зв'язку між геометричними об'єктами (локусами), з одного боку, і аналітичними виразами (функціями) – з іншого. Але для більш чіткого стеження за цим зв'язком необхідно нагадати поняття прямої і оберненої задач аналітичної геометрії.

Таблиця 1.1 – Опорні області і локуси

Функція	Графічний образ	Одна змінна	Дві змінні	Три змінні
$y = 1 - x^2$	Опорна область	Відрізок $-1 \leq x \leq 1$	Смуга $-1 \leq x \leq 1$	Прошарок $-1 \leq x \leq 1$
	Локус	Точки $x = -1;$ $x = 1$	Паралельні прямі $x = -1;$ $x = 1$	Паралельні площини $x = -1;$ $x = 1$
$y = 1 - x^2 - y^2$	Опорна область	×	Круг $1 - x^2 - y^2 \geq 0$	Нескінченний циліндр $1 - x^2 - y^2 \geq 0$
	Локус	×	Коло $1 - x^2 - y^2 = 0$	Поверхня циліндра $1 - x^2 - y^2 = 0$
$y = 1 - x^2 - y^2 - z^2$	Опорна область	×	×	Куля $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$
	Локус	×	×	Сфера $1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$

#### 1.4. Опис базових об'єктів

Аналітична геометрія як наука виникла на стику геометрії та математичного аналізу і вплинула на розвиток не тільки цих, але й багатьох інших наук, пов'язаних з необхідністю сумісної обробки різномірної інформації – переважно проєкційної та аналітичної. В основі аналітичної геометрії лежить метод координат, запропонований Р. Декартом.

Характерним об'єктом для вивчення в аналітичній геометрії є пара:

$$\{f(P)\} \leftrightarrow \{L\},$$

де  $f(P)$  – функція,  $P = (x_1, \dots, x_n)$  – точка у  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $E^n$ , а  $L$  – геометричний об'єкт в  $E^n$ , що являє собою геометричне місце точок, у яких  $f(P) = 0$ , або (що те ж саме) – множину розв'язків рівняння  $f(P) = 0$  геометричного об'єкта  $L$ .

У сучасній літературі геометричний об'єкт в  $E^n$  прийнято називати *локусом* (скорочення від "локальний кусок").

Найпростішими прикладами пар "функція – локус" є:

$$\left\{1 - \frac{x}{a} - \frac{x}{b}\right\} \leftrightarrow \{\text{пряма, що відсікає по осях координат відрізки } a, b\};$$

$\{x \cos \alpha + y \sin \alpha - p\} \leftrightarrow \{\text{пряма, така, що перпендикуляр } p \text{ до неї, який побудовано з початку координат, нахилений до осі абсцис під кутом } \alpha\};$

$$\{R^2 - x^2 - y^2\} \leftrightarrow \{\text{коло радіуса } R \text{ з центром у початку координат}\}.$$

Функції "ліворуч" однозначно визначають геометричні об'єкти "праворуч", а навпаки – не буде правильним.

Пошуки геометричного об'єкта за заданою функцією (*пряма задача аналітичної геометрії*) являє собою задачу, яка має однозначний розв'язок, у той час як побудова рівняння  $f(P) = 0$  за заданим геометричним об'єктом  $L$  (*обернена задача аналітичної геометрії*) призводить до множини розв'язків (в'язки функцій, що дорівнюють нулю на множині точок  $L$  і відмінні від нуля поза  $L$ ).

Якщо захочемо, щоб між зазначеними парами

$$\{\text{функція } f(P)\} \leftrightarrow \{\text{геометричний об'єкт } L\}$$

існувала взаємно однозначна відповідність, то повинні будемо розглянути також деякі додаткові умови, виконання яких дозволило б виділити із множини можливих розв'язків оберненої задачі аналі-

---

тичної геометрії єдиний розв'язок. Але для цього доведеться вийти за межі геометричного об'єкта  $L$  і розглянути поведінку  $f(P)$  всюди в  $E^n$ , що в класичній аналітичній геометрії роблять рідко. Зокрема, найпростіший спосіб зв'язати  $f(P)$  і  $L$  – це виконати умову:

$$f(P) = \inf_{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in L} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2} \quad (1.1)$$

яка означає, що серед множини можливих функцій, які дорівнюють нулю на  $L$  (і ніде більше), має бути обрана така, що дорівнює найкоротшій відстані від будь-якої точки  $P$  до геометричного об'єкта  $L$ .

Функцію  $f(P)$ , що задовольняє (1.1), прийнято називати *нормальною функцією*  $L$ , а рівняння  $f(P)=0$  – *нормальним рівнянням локусу*  $L$ .

Серед функцій, що розташовані ліворуч у наведених вище прикладах, нормальними функціями є:

$$\begin{aligned} & |x \cos \alpha + y \sin \alpha - p| \text{ – для прямої,} \\ & |R - \sqrt{x^2 + y^2}| \text{ – для кола.} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нормальні функції (1.2) використовуються під час розв'язання багатьох прикладних задач. Характерний недолік нормальних функцій – існування точок розриву похідних. Прикладами задач, у яких такі розриви неприпустимі, є задачі математичної фізики, які виникають під час досліджень полів різної фізичної природи.

Рис. 1.1 демонструє графіки, на яких чітко простежуються лінії рівня (еквіпотенціалі), що поступово переходять у прямокутник, – тобто еквіпотенціаль нульового рівня.

Наведені графіки побудовано лише для внутрішньої частини прямокутника. Зовні вони являють собою поступово спадаючі опуклі поверхні, розташовані нижче площини  $Oxy$ . Ці графіки дозволяють скласти наочну уяву про характер поведінки розглянутих функцій усередині прямокутника. Спільною рисою всіх цих функцій є те, що вони дорівнюють нулю на границі прямокутника. А таких функцій існує нескінченно багато. Отже, на рис. 1.1 наведено

графіки лише деяких представників множини функцій, що дорівнюють нулю на прямокутнику.

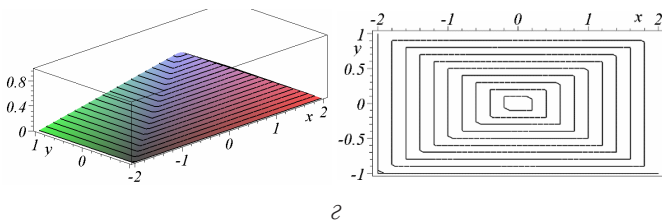
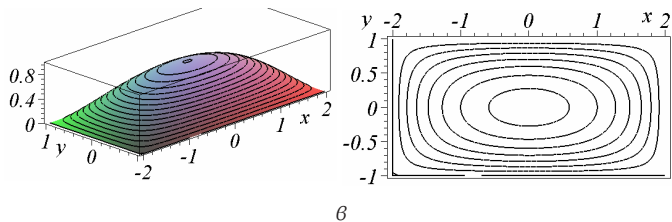
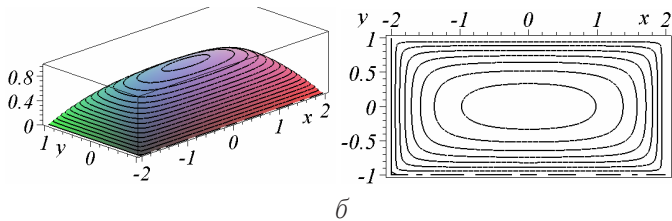
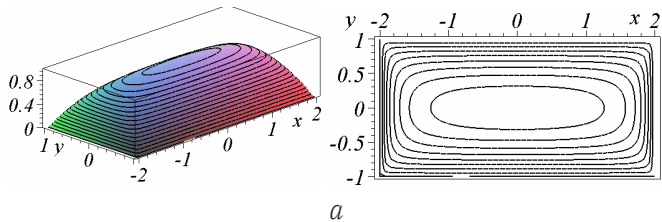


Рисунок 1.1 – Графіки функцій, що приймають нульове значення на прямокутнику, та проекції ліній рівня (еквіпотенціалей) цих графіків, які "спираються" на прямокутник

## 1.5. Обернена задача аналітичної геометрії

Процес побудови локусу заданої функції прийнято називати *розв'язанням прямої задачі аналітичної геометрії*. Класичний приклад – визначення коренів функції. За аналогією було введено і обернене поняття, що є не менш важливим для практики.

*Розв'язанням оберненої задачі аналітичної геометрії* називають процес побудови функції, локус якої (з прийнятною для практики точністю) збігався б з графічним образом.

Під час розв'язання *оберненої задачі*, як правило, досліднику необхідно в прямокутній системі координат *Oxyz* описувати деякий просторовий геометричний об'єкт рівнянням у неявній формі  $F(x, y, z) = 0$ .

Отже, зміст *розв'язання оберненої задачі аналітичної геометрії* полягає в описі геометричного об'єкта (локусу) рівнянням у неявній формі. При цьому враховується, що в лівій частині рівняння знаходиться функція, про яку згадувалося в означенні.

*Обернена задача розв'язується неоднозначно*. Це впливає з того, що існує безліч графіків, які можуть пройти через заданий локус. Але з кожним графіком можна зв'язати деяку функцію, що входить до опису локусу. Тоді локус буде описаний одним рівнянням з безлічі рівнянь, зокрема – нормальним рівнянням, яке має унікальні метричні властивості.

Наведені означення по-іншому надають зміст *оберненої задачі аналітичної геометрії* та один зі шляхів саме практичного її розв'язання.

Нехай задано локус. Необхідно побудувати його рівняння. Існує множина функцій, локуси яких збігаються з заданим графічним образом. Звідси впливає, що існує і нескінченне число графіків цих функцій, які спираються на заданий локус. Для успішного розв'язання *оберненої задачі* достатньо мати ефективний для практики спосіб побудови одного зі згаданих графіків. Тобто процес побудови функції замінюється процесом побудови графіка цієї функції. Таке можливо здійснити тільки графічними способами.

Як "будівельний матеріал" ("цеглинки") процесу побудови графіка шуканої функції природно прийняти елементарні графіки сім'ї функцій, локусами яких є сім'я фрагментів вихідного локусу.

Своєрідним "цементом" процесу повинні служити операції над графіками функцій (схожими на операції – "сума" або "добуток" графіків). Однак алгебраїчні операції для цієї мети не зовсім підходять з причин поганої формалізації процесу. Тут доцільно використовувати  $R$ -операції ( $R$ -функції). Формалізацію забезпечить тісний зв'язок  $R$ -функцій з операціями *теорії множин*.

Опорна область шуканої функції виступає як контролюючий елемент процесу опису через елементарні опорні області сім'ї функцій, локусами яких є сім'я фрагментів вихідного локусу. Слід пам'ятати, що локус функції може збігатися з її опорною областю.

Отже, для побудови графіка шуканої функції за допомогою деяких операцій над елементарними графіками функцій, які входять, наприклад, до опису фрагментів заданого локусу, недостатньо залучати до розгляду тільки зазначені функції. Справа в тому, що для розв'язання оберненої задачі є непридатними відомі алгебраїчні операції над графіками – "додавання" і "множення" графіків функцій.

Для пояснення цього з'ясуємо поняття "операція" і "функція" (наприклад, де саме застосовується " $R$ -операція", а де – " $R$ -функція"). *Операцію додавання* двох графіків можна оформити у вигляді:

$$G = \text{сума} (G_1, G_2),$$

де  $G_1$  і  $G_2$  – два деякі графіки;  $G$  – результуючий графік; "сума" – правило операції, згідно з яким необхідно здійснити покоординатне додавання графіків для точок з однаковими абсцисами.

Поданий запис нагадує символічну конструкцію для позначення функції двох змінних. Аналогічно маємо і для *операції множення* графіків:

$$G = \text{добуток} (G_1, G_2).$$

Нехай маємо два графіка функцій однієї змінної  $y = F_1(x)$  та  $y = F_2(x)$ . Операцію додавання двох графіків можна подати у вигляді  $y = \text{сума} (F_1(x), F_2(x))$  (рис. 1.2, а).

Опорна область функції  $y = \text{сума} (F_1(x), F_2(x))$  не визначається прийнятним для практики способом через опорні області вихід-

---



них функцій  $y=F_1(x)$  і  $y=F_2(x)$ , тобто з використанням відомих з теорії множин операцій "об'єднання" і "перетин" (див. нижче). Дійсно, опорна область функції  $y=$ **сума**  $(F_1(x), F_2(x))$  при жодному взаємному розташуванні графіків не збігається з об'єднанням або перетином опорних областей вихідних функцій. Аналогічно буде з функцією  $y=$ **добуток**  $(F_1(x), F_2(x))$ .

На рис. 1.2, б зображено побудови з масштабним множником  $1/20$ . Тут також не можна сконструювати опорну область функції  $y=$ **добуток**  $(F_1(x), F_2(x))$  з опорних областей функцій  $y=F_1(x)$  і  $y=F_2(x)$  шляхом об'єднання або перетину цих областей.

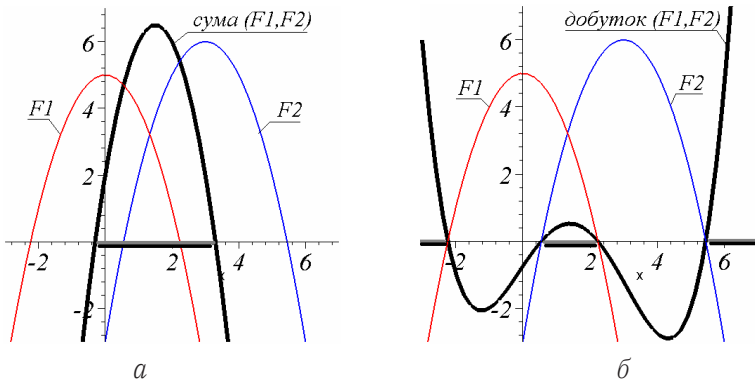


Рисунок 1.2 – Опорні області функцій  $F_1(x)$  і  $F_2(x)$   
(на координатній осі показані потовщеними відрізками):  
а – при додаванні; б – при множенні

З геометричної точки зору "конструктивна бідність" алгебраїчних операцій "сума" та "добуток" і стала одним з поштовхів до створення математичного апарата теорії R-функцій.

## 1.6. Визначення R-функцій і операцій теорії множин

Розглянемо дві функції однієї змінної  $y=F_1(x)$  і  $y=F_2(x)$ . Нехай функція з потрібними властивостями знайдена. Позначимо її

таким чином:  $y=R$ -диз'юнкція  $(F_1(x), F_2(x))$ . Опорна область цієї функції має збігатися з об'єднанням опорних областей вихідних функцій. Множина функцій утворить сім'ю  $R$ -функцій, кожен з яких прийнято називати  $R$ -диз'юнкцією (рис. 1.3, а).

Таким чином,  $R$ -диз'юнкцією називають функцію двох змінних (змінними при цьому є самі функції  $F_1(x)$  і  $F_2(x)$ ), опорна область якої буде об'єднанням опорних областей вихідних функцій.  $R$ -диз'юнкцію прийнято позначати таким чином:

$$y=F_1(x) \vee F_2(x).$$

Аналогічно вводиться і двоїста їй функція  $y=R$ -кон'юнкція  $(F_1(x), F_2(x))$  (рис. 1.3, б).

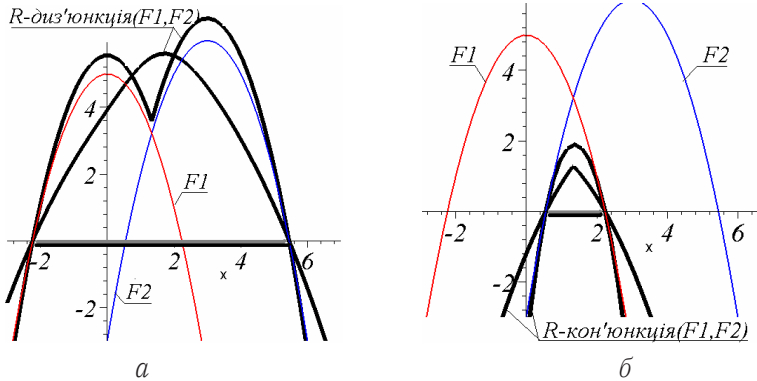


Рисунок 1.3 – Опорні області функцій  $F_1(x)$  і  $F_2(x)$ :  
а – при  $R$ -диз'юнкції; б – при  $R$ -кон'юнкції

$R$ -кон'юнкцією називають функцію двох змінних (змінними при цьому також служать самі функції  $F_1(x)$  і  $F_2(x)$ ), опорна область якої буде перетином опорних областей вихідних функцій.  $R$ -кон'юнкцію прийнято позначати таким чином:

$$y=F_1(x) \wedge F_2(x).$$

Існує багато різних способів розкриття запису цих  $R$ -функцій засобами алгебраїчних операцій. Наприклад, найпростішим способом подання  $R$ -диз'юнкції та  $R$ -кон'юнкції є такий:

$$\begin{aligned} F_1 \vee F_2 &= \frac{1}{2}(F_1 + F_2 + |F_1 - F_2|), \\ F_1 \wedge F_2 &= \frac{1}{2}(F_1 + F_2 - |F_1 - F_2|). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для повноти конструктивних засобів необхідно ввести ще одну  $R$ -функцію. Нехай задано функцію  $y = F(x)$ , опорну область якої позначимо  $A$ .

$R$ -запереченням називають функцію однієї змінної (змінною є функція  $F(x)$ ), опорна область якої доповнює  $A$  по всій області існування функції.  $R$ -заперечення позначають таким чином:  $\overline{F}(x)$ . Засобами алгебраїчних операцій  $R$ -заперечення виражають у такий спосіб:  $\overline{\overline{F}(x)} = -F(x)$ .

В практиці частіше використовують формули:

$$\begin{aligned} F_1 \vee F_2 &= F_1 + F_2 + \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \\ F_1 \wedge F_2 &= F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \\ \overline{\overline{F}} &= -F. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Зупинимось докладніше на зв'язку між  $R$ -функціями і операціями теорії множин – об'єднанням і перетином.

Розглянемо множину точок, утворену ділянками осі  $Ox$ , або площини  $Oxy$ , або простору  $Oxyz$ . Описати таку множину точок можна за допомогою нерівностей  $A: F(x, y) > 0$  або рівнянь  $B: F(x, y, z) = 0$ . Цей запис слід розуміти таким чином: через  $A$  позначені ті точки площини  $Oxy$  (або простору  $Oxyz$ ), в яких функція  $F(x, y)$  приймає невід'ємне значення, тобто  $A$  – це опорна область функції  $F(x, y)$ ; через  $B$  позначено ті точки простору  $Oxyz$ , в яких функція  $\Phi(x, y, z)$  дорівнює нулю, тобто  $B$  – це локус функції  $\Phi(x, y, z)$ . На рисунках

---

опорні області функції зручно позначати стрілкою, що виходить з довільної точки границі області і яка спрямована у бік зростання функції.

*Об'єднанням*  $A \cup B$  множин  $A$  і  $B$  називають множину точок, яка складається з усіх елементів  $A$  і  $B$ .

Перетином  $A \cap B$  множин  $A$  і  $B$  називають множину точок, яка складається з елементів, що належать одночасно  $A$  і  $B$ . Якщо спільних точок множин  $A$  і  $B$  не існує, то перетин цих множин позначають символом  $\emptyset$  і називають порожньою множиною.

Доповненням  $\bar{A}$  називають множину точок основної множини  $I$ , що не належить множині  $A$ . Під основною множиною  $I$  будемо розуміти всю вісь  $Ox$ , або площину  $Oxy$ , або простір  $Oxyz$ .

Деякі властивості логічних операцій:

1. *Закон комутативності:*

$$\begin{aligned}A \cap B &= B \cap A, \\A \cup B &= B \cup A.\end{aligned}$$

2. *Закон асоціативності:*

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C).\end{aligned}$$

3. *Закон дистрибутивності:*

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C).\end{aligned}$$

4. *Закон поглинання:*

$$\begin{aligned}A \cap A &= A, \\A \cup A &= A.\end{aligned}$$

5. Закон подвійного заперечення:

$$\begin{aligned} &= \\ A &= A. \end{aligned}$$

6. Правила де Моргана:

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

7. Закон логічного протиріччя:

$$A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

8. Закон виключення третього:

$$A \cup \overline{A} = I.$$

9. Операції з основною  $I$  та порожньою  $\emptyset$  множинами:

$$\begin{aligned} I \cap A &= A, \quad \emptyset \cap A = \emptyset, \quad \overline{I} = \emptyset, \\ I \cup A &= I, \quad \emptyset \cup A = A, \quad \overline{\emptyset} = I. \end{aligned}$$

Формальна заміна символів  $\cup$  на  $\cap$ ,  $\cap$  на  $\cup$ ,  $I$  на  $\emptyset$ ,  $\emptyset$  на  $I$  не порушить наведених вище рівностей.

Логічною формулою називають символічний запис, що містить позначення декількох множин точок, пов'язаних логічними операціями. Для вказання послідовності виконання операцій допускається використання дужок.

Під композицією геометричного об'єкта будемо розуміти процес опису просторової форми деякого об'єкта за допомогою логічної

формули. При цьому мають бути відомими описи всіх множин, що характеризують вихідний об'єкт.

Під *декомпозицією геометричного об'єкта* будемо розуміти процес вибору деякого набору множин точок, який є необхідним для опису цього об'єкта логічною формулою. При цьому повинні бути відомі описи всіх множин (опорних областей). Задача декомпозиції геометричного об'єкта розв'язується неоднозначно. Один і той самий геометричний об'єкт можна описати різними логічними формулами. Деякі з них є ідентичними. Це доводиться шляхом перетворення формул з урахуванням властивостей наведених логічних операцій.

**Приклад 1.8.** На рис. 1.4 зображено плоский геометричний об'єкт. Для його опису рівнянням необхідно обрати такі опорні області:

$$A_1 = 60 - |x| \geq 0,$$

$$A_2 = 10 - |y| \geq 0,$$

$$A_3 = 1 - \frac{|x|}{48,5} - \frac{|y|}{84} \geq 0,$$

$$A_4 = 1 - \frac{|x|}{11,55} + \frac{|y|}{20} \geq 0,$$

$$A_5 = 1 + \frac{|x|}{11,55} - \frac{|y|}{20} \geq 0,$$

$$A_6 = 42 - |y| \geq 0,$$

$$A_7 = 1 - \frac{|x|}{120} - \frac{|y|}{69,3} \geq 0,$$

$$A_8 = x^2 + y^2 - 625 \geq 0,$$

$$A_9 = |x| - 10 \geq 0,$$

$$A_{10} = |y| - 35 \geq 0.$$

Геометричний об'єкт (рис. 1.4) можна описати також логічними формулами:

---

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \wedge A_2, & B_2 &= (A_4 \wedge A_5) \wedge A_7, \\ B_3 &= B_1 \vee B_2, & B_4 &= A_3 \wedge A_6, \\ B_5 &= B_3 \vee B_4, & B_6 &= A_{10} \vee A_9, \\ B_7 &= B_6 \wedge A_8, & B &= B_5 \wedge B_7. \end{aligned}$$

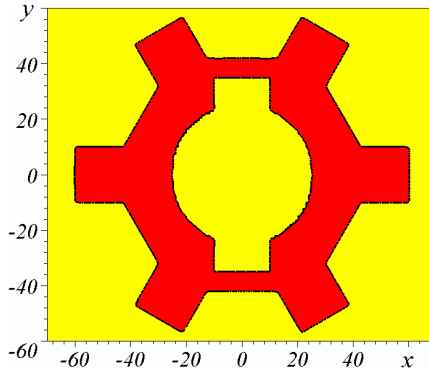
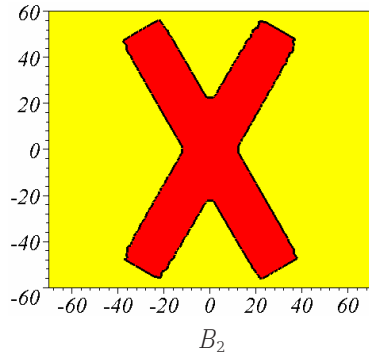
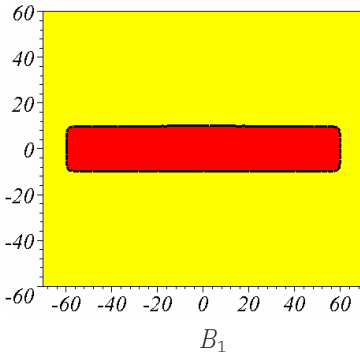
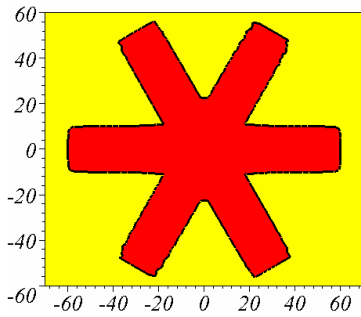


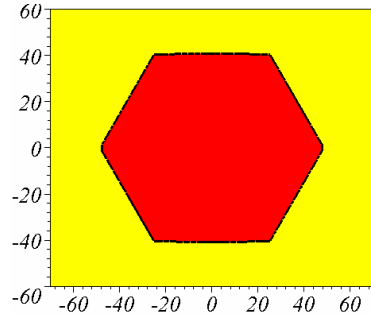
Рисунок 1.4 – Приклад плоского геометричного об'єкта

На рис. 1.5 наведено послідовні етапи застосування цих логічних формул.

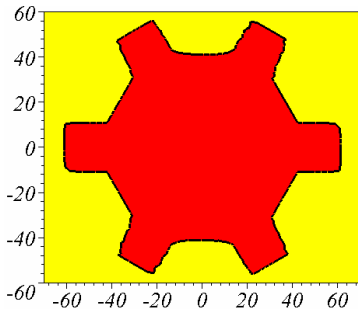




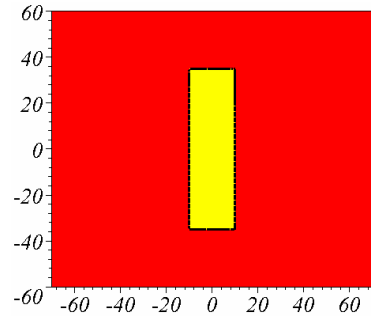
$B_3$



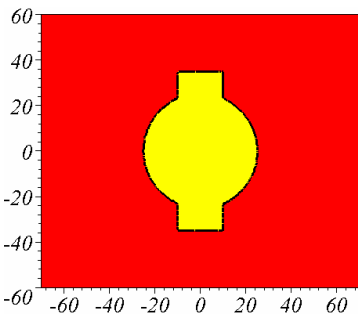
$B_4$



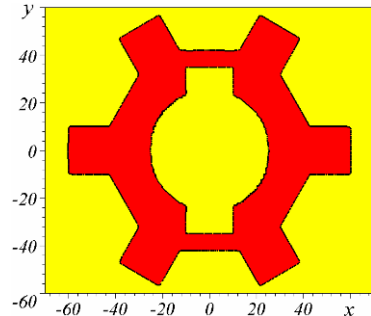
$B_5$



$B_6$



$B_7$



$B_8$

Рисунок 1.5 – Послідовні етапи застосування логічних формул для плоского геометричного об'єкта



### 1.7. Опис геометричних об'єктів $R$ -функціями

Практика здійснення декомпозиції об'єкта показує, що не завжди буває успішною спроба описати геометричний об'єкт логічною формулою, використовуючи лише ті опорні області, які "підказує" геометрія цього об'єкта. Як правило, необхідно вибрати ще і деякі додаткові опорні області. Спроба описати геометричний об'єкт (рис. 1.6), використовуючи лише чотири кола, до успіху не призведе (тому що початок координат цим колам не належить). У цьому випадку необхідно ще, наприклад, додати коло відповідного радіуса з центром у початку координат. Тобто етап декомпозиції геометричного об'єкта є досить відповідальним щодо опису геометричного об'єкта рівнянням у неявній формі.

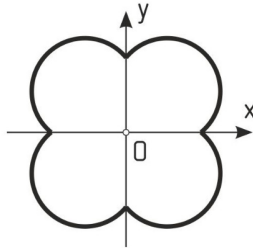


Рисунок 1.6 – Приклад об'єкта, для опису якого необхідно мати додаткову опорну область

Наведемо приклад опису просторового геометричного об'єкта за допомогою  $R$ -функцій.

**Приклад 1.9.** Необхідно описати циліндр з двома отворами (рис. 1.7). Оберемо такі опорні області:

$$A_1 = 45^2 - x^2 - y^2,$$

$$A_2 = x^2 + y^2 - 21^2,$$

$$A_3 = 90 - z,$$

$$A_4 = z,$$

$$A_5 = z - 60,$$

$$A_6 = 25 - z,$$

$$A_7 = \frac{|x|}{7} - \frac{z}{15} - 1,$$

$$A_8 = -x,$$

$$A_9 = -y.$$

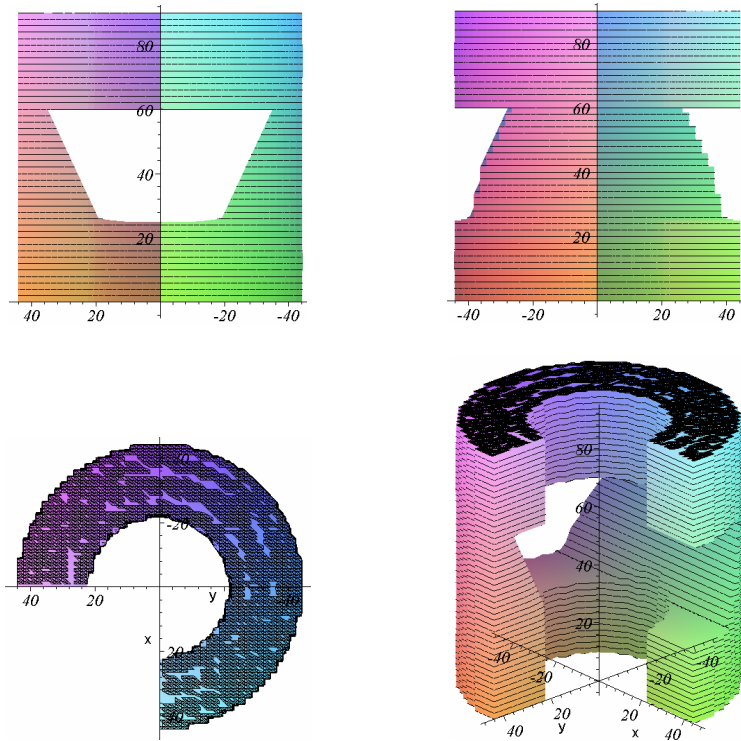


Рисунок 1.7 – Приклад просторового геометричного об'єкта

Для опису геометричного об'єкта низка логічних формул має вигляд:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= ((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge A_4, & B_2 &= (A_5 \vee A_6) \vee A_7, \\
 B_3 &= B_1 \wedge B_2, & B_4 &= A_8 \vee A_9, \\
 B &= B_3 \wedge B_4.
 \end{aligned}$$

На рис. 1.8 наведено послідовні етапи застосування логічних формул для опису просторового (тривимірного) геометричного об'єкта.

В результаті викладеного вище можна намітити загальну схему опису геометричного об'єкта рівнянням за допомогою  $R$ -функцій.

Припустимо, що рівняння  $F=0$  границі об'єкта складено. Тоді локусом функції  $F$  має бути його границя, а опорною областю – його внутрішня область.

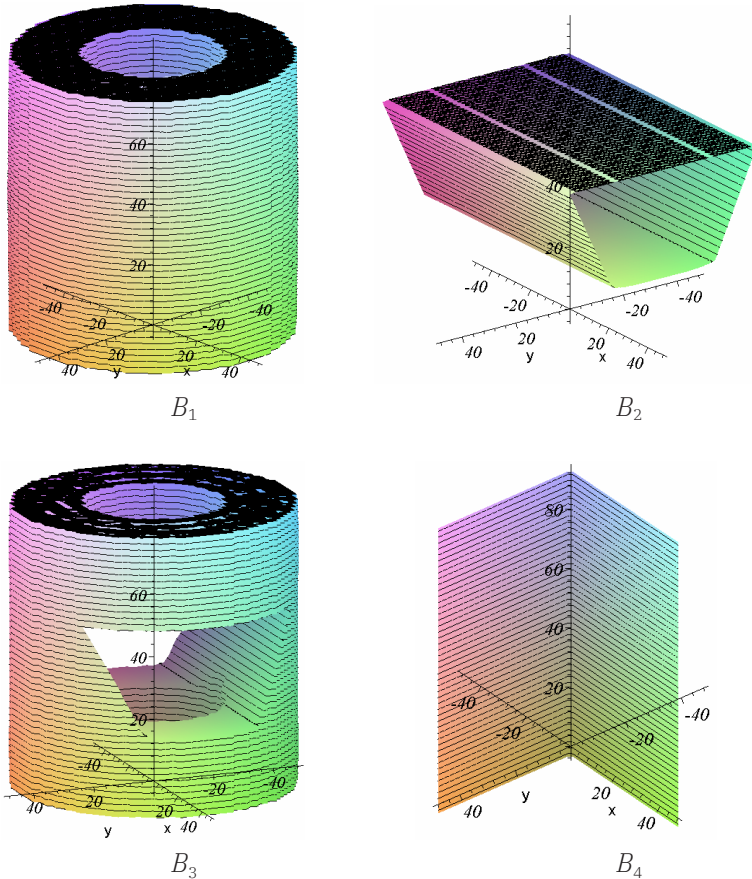


Рисунок 1.8 – Етапи застосування логічних формул для опису просторового геометричного об'єкта

Для побудови рівняння необхідно:

1. Вибрати множину точок  $A$ , яку обіймає заданий геометричний об'єкт у просторі, як опорну область поки ще невідомої функції  $F$ . Задача – побудувати цю функцію, що дозволяє нам одержати рівняння  $F=0$ .

2. Зробити декомпозицію об'єкта, тобто вибрати набір множин  $\{A_i\}$ ,  $i=1, n$ , що є зручними для опису  $A$  за допомогою логічної формули. При цьому для кожної множини з набору має бути відомим її опис (наприклад, за допомогою нерівностей  $F_i=0$ ).

3. Здійснити композицію об'єкта за допомогою логічної формули:

$$A = \mathfrak{S}(A_1, A_2, \dots, A_n).$$

4. Зробити у логічній формулі формальні заміни:

а) знаки логічних операцій замінити на знаки  $R$ -функцій: " $\cup$ " – на " $\vee$ ", " $\cap$ " – на " $\wedge$ ", знак доповнення – на знак  $R$ -заперечення;

б) символи  $A_i$  замінити на запис функцій  $F_i$ , для яких  $A_i$ , відповідно, є опорною областю:

$$F = \mathfrak{S}(F_1, F_2, \dots, F_n).$$

5. Записати рівняння об'єкта у вигляді  $F=0$ .

Найбільш суперечливим місцем у цій схемі є другий пункт з декомпозицією об'єкта. На неї може впливати суб'єктивний фактор, тобто різні фахівці по-різному опишуть той самий об'єкт. Але якби це було не так, то розглянуту схему довелось б вилучити, оскільки вона суперечила б положенню про неоднозначний розв'язок оберненої задачі аналітичної геометрії.

**Приклад 1.10.** Рівняння геометричного об'єкта, зображеного на рис. 1.9 і описаного за допомогою  $R$ -функцій має вигляд:

$$\left\{ \left[ (4 - y^2 - z^2) \wedge (x + 10) \wedge (2 - x) \right] \vee \left[ (16 - x^2 - y^2 - z^2) \wedge x \right] \right\} \wedge \\ \wedge \left[ (y - 1) \vee (2 - x) \vee (-1 - y) \right] = 0.$$

Це рівняння можна записати і за допомогою алгебраїчних операцій, враховуючи наведені формули, які розкривають зміст  $R$ -функцій.

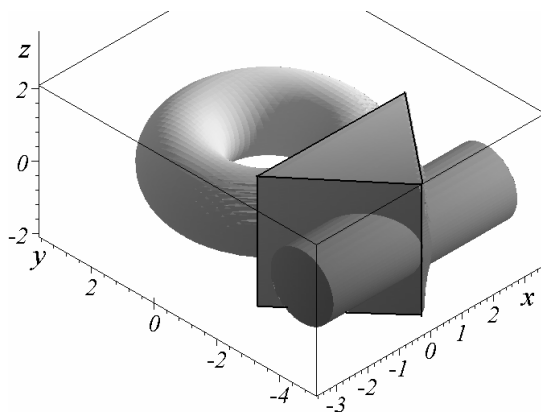


Рисунок 1.9 – Приклад геометричного об'єкта, поверхня якого складається з фрагментів тора, циліндричної та призматичної поверхонь

### Контрольні запитання та вправи

1. Пояснити поняття аналітичного моделювання геометричних об'єктів.
2. Визначити поняття функції, функціональної залежності та алгоритму.
3. Сформулювати пряму і обернену задачі аналітичної геометрії.
4. Дати означення графіка функції, опорної області, локусу.
5. Охарактеризувати зміст розв'язання оберненої задачі аналітичної геометрії.
6. Назвати види  $R$ -операцій.
7. Навести приклади опису геометричних об'єктів за допомогою  $R$ -функцій.

## РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ПАРАЛЕЛЬНИХ МНОЖИН

Геометричне моделювання еквіфазних поверхонь (фронтів поширення явищ і процесів або поверхонь розділу речовин гетерогенних сумішей, де проходять реакції) спирається на основні положення теорії паралельних множин.

Якщо процес поширюється в однорідному середовищі, то з позицій прикладної геометрії його фронти моделюють за допомогою паралельних множин. Якщо процес протікає у неоднорідному середовищі, то в цьому випадку геометричні моделі фронтів необхідно подавати як геометричні моделі квазіпаралельних множин. Паралельні і квазіпаралельні множини складають *узагальнені паралельні множини*.

Графічним поданням паралельних множин є сім'я паралельних (еквідистантних) ліній на площині або сім'я паралельних (еквідистантних) поверхонь у тривимірному просторі. В свою чергу, графічним поданням квазіпаралельних множин є сім'я квазіпаралельних ліній на площині або сім'я квазіпаралельних поверхонь у просторі.

### 2.1. Елементи теорії паралельних множин

Фундаментальною властивістю узагальнених паралельних множин є *властивість конформності*. Це означає наступне. Нехай фронт рухається у просторі і змінює з часом свою форму. У кожній точці простору, до якої поширився фронт на певний момент часу, вектор швидкості буде перпендикулярний до поверхні фронту. Тоді з точки зору геометрії увесь процес у певному середовищі буде подано у вигляді конформної сітки ліній (двовимірний випадок) або у вигляді сім'ї поверхонь, кожна з яких є, наприклад, множиною точок – кінців нормалей сусідньої поверхні (тривимірний випадок).

Нехай у декартовій системі координат  $Oxy$  на площині  $z=0$  задано лінію  $\partial G_0$ , яка обмежує фігуру  $G_0$ . Вважатимемо, що лінію  $\partial G_0$

можна описати або параметрично:  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , – або у неявному вигляді:  $F(x, y) = 0$ . За аналогією з поняттям *паралельної множини*, що введено в наукових працях з інтегральної геометрії, існують такі означення для геометричних об'єктів.

**Означення 2.1.** Контур фігури  $\partial G_t$  буде на відстані  $t$  *паралельним* контуру фігури  $\partial G_0$  якщо лінію  $\partial G_t$  утворять кінці нормалей до контуру  $\partial G_0$  довжина яких дорівнюватиме  $t$ .

За означенням 2.1 на площині  $Oxy$  для "початкової" кривої  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  опис паралельної до неї кривої має вигляд:

$$X(t) = \phi - \frac{t \frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}}; \quad Y(t) = \psi + \frac{(\phi - X) \frac{d\phi}{dt}}{\frac{d\psi}{dt}}. \quad (2.1)$$

Означення 2.1 передбачає відсутність у "початкової" кривої кутових точок, у яких неможливо визначити нормалі.

На рис. 2.1 наведено криві, що підпадають під означення 2.1, тобто їх описи задовольняють рівнянням (2.1), але зображення цих кривих не збігаються з інтуїтивним сприйняттям паралельних кривих (як приклад) до астроїди  $x = \cos^3 t$ ;  $y = \sin^3 t$ .

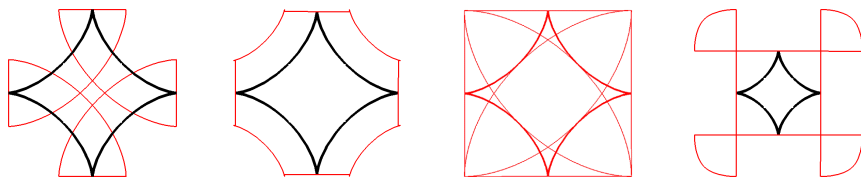


Рисунок 2.1 – Криві, що описано формулами (2.1) і паралельні до астроїди

**Означення 2.2.** Фігуру  $G_t$  називають *квазіпаралельною* фігурі  $G_0$  на відстані  $t = t(x, y)$ , якщо  $G_t$  складається з об'єднання усіх кругів змінного радіуса  $t = t(x, y)$ , центрами яких є точки  $G_0$ . Причому контури  $\partial G_0$  і  $\partial G_t$  квазіпаралельних фігур  $G_0$  і  $G_t$  називають квазіпара-

лельними кривими, які відстоять між собою на відстані  $t = t(x, y)$ . У випадку, коли  $t = \text{const}$ , маємо паралельні фігури та криві.

Друге означення не спирається на поняття нормалі кривої, тому його можна застосовувати й у разі негладких об'єктів  $G_0$ . Крім того, може бути випадок, коли  $\partial G_0 = G_0$ .

**Означення 2.3.** Геометричний об'єкт  $G_t$  називають *квазіпаралельним* геометричному об'єкту  $G_0$  на відстані  $t = t(x, y, z)$ , якщо  $G_t$  складається з об'єднання усіх куль радіуса  $t = t(x, y, z)$ , центрами яких є точки  $G_0$ . Причому поверхні  $\partial G_0$  і  $\partial G_t$  квазіпаралельних об'єктів  $G_0$  і  $G_t$  називають квазіпаралельними поверхнями, які відстоять між собою на відстані  $t = t(x, y, z)$ . У випадку, коли  $t = \text{const}$ , маємо паралельні геометричні об'єкти та поверхні.

Означення 2.2 і 2.3 і є конструктивними означеннями паралельних і квазіпаралельних множин відповідно для двовимірного і тривимірного випадків. Вони складають основу конструктивної теорії узагальнених паралельних множин.

Властивість конформності узагальнює і одночасно відокремлює клас задач, які розв'язуються методами геометричного моделювання узагальнених паралельних множин. Конструктивне подання геометричних моделей дозволяє алгоритмічно і програмно реалізувати ці методи.

На практиці інтерес становлять розв'язки таких задач розрахунку паралельних об'єктів.

*Пряма задача.* Для заданої поверхні  $G_0$  визначити функції  $L(t)$  і  $U(t)$ , що описують зміну за часом  $t$ , відповідно, площі поверхні  $S_t$  і об'єму паралельних тіл  $G_t$ .

*Обернена задача.* Для заданої функції  $L(t)$ , що описує зміну площі поверхні  $S_t$ , визначити тіло  $G_0$ .

Обернена задача має неоднозначні розв'язки, й у загальному вигляді її не розв'язано.

Для зручності викладення матеріалу площу паралельної поверхні  $S_t$  деякого об'єкта та об'єм тіла  $G_t$ , обмеженого цією поверхнею, названо *інтегральними характеристиками*.

**Твердження 2.1.** Нехай у деякі моменти часу  $t$  значення функцій  $U(t)$  і  $L(t)$  збігаються відповідно зі значеннями об'ємів елементів сім'ї тіл  $G_t$  і з площами поверхонь  $S_t$ , що їх обмежують. Тоді виконуються співвідношення:



$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = L(t). \quad (2.2)$$

Співвідношення (2.2) має таку ж саму структуру, що і відома формула Стокса.

Геометрична форма початкової поверхні  $G_0$  є головним чинником, що впливає на функціональну залежність зміни в часі  $t$  інтегральних характеристик сім'ї паралельних поверхонь  $G_t$ . Для плоскої фігури функціями  $L(t)$  і  $U(t)$  завжди будуть поліноми (відносно  $t$ ) першого та другого степеня.

На практиці паралельні криві зручно використовувати для геометричної інтерпретації гетерогенного процесу або явища хвильової природи, наприклад процесу "горіння" фігури, яку "запалили" по її периметру. У цьому випадку метричну змінну  $t$ , що входить до означень, ототожнюють з часовою змінною  $t$ , яка належить інтервалу  $[0, T]$ . Тобто  $t$  є часом, за який "хвиля" фізичного процесу з фронтом у вигляді паралельної кривої, охопить  $t$ -окил деякої точки. Це узгоджується з фізичним принципом Гюйгенса, який пояснює "механіку" поширення процесів хвильової природи.

## **2.2. Дві концепції геометричного моделювання узагальнених паралельних множин**

### **2.2.1. "Променева" і "хвильова" точки зору на поширення збурення в середовищі**

Відповідно до екстремального принципу Ферма, збурення фізичного поля у деякому середовищі поширюється з точки  $q_0$  у точку  $q$  за *найкоротший час*. При цьому швидкість збурення може залежати як від точки  $q$  (*неоднорідне* середовище), так і від напрямку променя (*неізотропне* середовище, наприклад кристали). Властивості середовища описуємо, задавши в дотичному просторі в кожній точці  $q$  поверхню (*індикатрису*). Для цього відкладаємо в кожному напрямку вектор швидкості поширення світла в даній точці за даним напрямком (рис. 2.2).

---

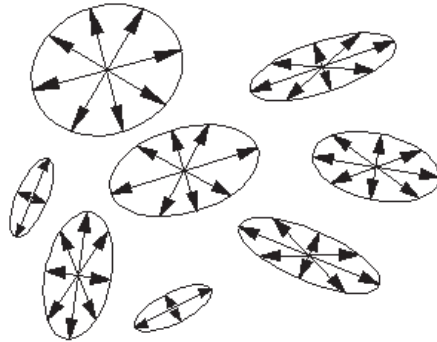


Рисунок 2.2 – Вектори швидкостей у точках неізотропного, неоднорідного середовища

Нехай  $t > 0$ . Розглянемо множину всіх точок  $q$ , до яких збурення з даної точки  $q_0$  може дійти за час, менший або рівний  $t$ . Границя цієї множини  $\Phi_{q_0}(t)$  називається хвильовим фронтом точки  $q_0$  через час  $t$  і складається з точок, до яких збурення може дійти лише за час  $t$  і не може дійти швидше. Між хвильовими фронтами, що відповідають різним значенням  $t$ , існує співвідношення, відкрите Гюйгенсом (рис. 2.3).

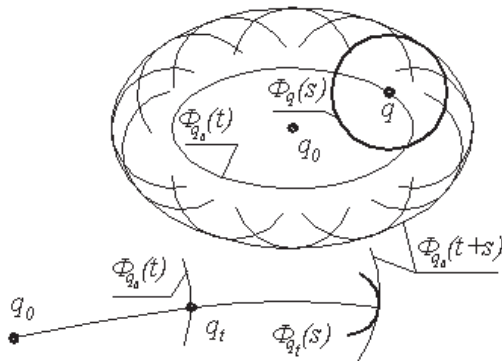


Рисунок 2.3 – Обвідна хвильових фронтів

**Теорема 2.1 (теорема Гюйгенса).** Розглянемо хвильовий фронт  $\Phi q_0(t)$  точки  $q_0$  через час  $t$ . Побудуємо для кожної точки  $q$  цього фронту хвильовий фронт  $\Phi q(s)$  через час  $s$ . Тоді хвильовий фронт  $\Phi q_0(s+t)$  точки  $q_0$  через час  $s+t$  буде обвідною побудованих фронтів  $\Phi q(s)$ ,  $q \in \Phi q_0(t)$ .

Наведена теорема має назву *принципу Гюйгенса*. Зрозуміло, що точку  $q_0$  можна було б замінити кривою, поверхнею або взагалі замкнутою множиною, тривимірний простір  $\{q\}$  – будь-яким гладким "багатовидом", а збурення вважати довільним і таким, що передається "локально".

Принцип Гюйгенса приводить до двох концепцій опису та вивчення процесу поширення збурення: "*променевої*" і "*паралельно-множинної*".

Згідно з першою концепцією, відстежуються промені, тобто найкоротші шляхи поширення збурення. У цьому випадку локальний характер поширення збурення задається вектором швидкості  $q$ . Якщо напрям променів відомий, то довжина вектора швидкості задається властивостями середовища (індикатрисою). Згідно з другою концепцією, відстежується *хвильовий фронт*. Тут хвильові фронти виступають як елементи паралельних або узагальнених паралельних множин.

Припустимо, що в просторі  $\{q\}$  задано ріманову метрику. Тоді говорять про *швидкості руху хвильового фронту*. Розглянемо, наприклад, поширення збурення в середовищі, що заповнює евклідовий простір. Тоді рух хвильового фронту характеризується вектором  $p$ , перпендикулярним до фронту, що будується у такий спосіб.

Для кожної точки  $q_0$  визначається функція  $Sq_0(q)$  як *оптична довжина* шляху від  $q_0$  до  $q$ , тобто найменший час поширення збурення від  $q_0$  до  $q$ . Множина рівня  $\{q: Sq_0(q) = t\}$  є не що інше, як хвильовий фронт  $\Phi q_0(t)$  (рис. 2.4). Градієнт функції  $S$  (у сенсі згаданої вище метрики) є перпендикулярним до хвильового фронту і характеризує його рух. При цьому чим більше градієнт, тим повільніше рухається фронт. Тому Гамільтон назвав  $p = \partial S / \partial q$  *вектором нормальної повільності фронту*.

Напрямок променя  $\dot{q}$  і напрям руху фронту  $p$  у неізотропному середовищі не збігаються. Однак один з одним вони пов'язані простим співвідношенням, що легко виводиться з принципу Гюйгенса.

Нагадаємо, що властивості середовища в кожній точці характеризуються поверхнею векторів швидкостей збурення – *індикатрисою*.

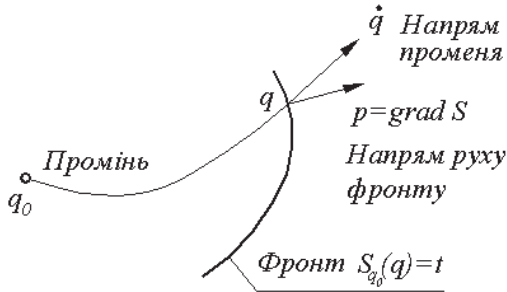


Рисунок 2.4 – Напрямок променя і напрям руху фронту

**Означення 2.4.** Напрямок гіперплощини, що дотикається до індикатриси в точці  $v$ , називається *спряженим* до напрямку  $v$  (рис. 2.5).

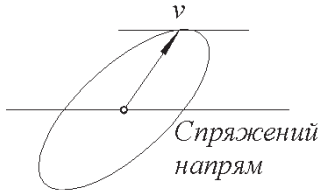


Рисунок 2.5 – Спряжена гіперплощина

**Твердження 2.2.** Напрямок хвильового фронту  $\Phi q_0(t)$  в точці  $q_t$  буде спряженим відносно напрямку променя  $\dot{q}$ .

*Доведення.* Розглянемо точки  $q_t$  променя  $q_0q_t$ ,  $0 \leq \tau \leq t$  (рис. 2.6). Нехай  $\epsilon \in$  малим. Тоді фронт  $\Phi q_{t-\epsilon}(\epsilon)$  відрізняється від індикатриси точки  $q_t$ , стиснутої в  $\epsilon$  разів, лише на малу величину порядку  $\Phi(\epsilon^2)$ . За принципом Гюйгенса цей фронт  $\Phi q_{t-\epsilon}(\epsilon)$  дотикається до фронту  $\Phi q_0(t)$  в точці  $q_t$ . Переходячи до границі при  $\epsilon \rightarrow 0$ , одержуємо теорему.

При зміні метрики, за допомогою якої визначається вектор  $p$ , буде мінятися поняття швидкості руху фронту, а звідси і довжина

та напрям вектора  $p$ . Однак диференціальна форма  $p\dot{q} = dS$  у просторі  $\{q\} = R^3$  визначена не залежним від допоміжної метрики чином; її значення залежить лише від обраного фронту (або променя). На гіперплощині, спряженій вектору швидкості променя, ця форма дорівнює нулю, а її значення на векторі швидкості дорівнює одиниці.

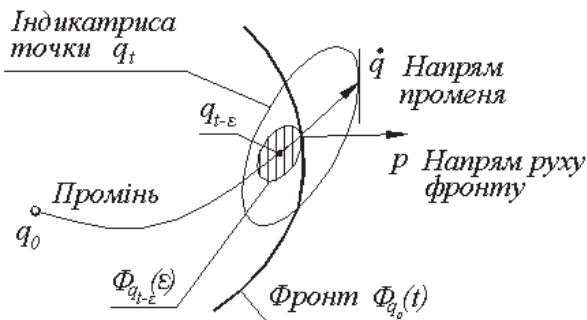


Рисунок 2.6 – Спряженість напрямів променя і фронту

Таким чином, вектори  $p$ , які відповідають будь-яким фронтам, що проходять через дану точку, не є довільними, але задовольняють одну умову: допустимі значення  $p$  заповнюють у просторі  $\{p\}$  гіперповерхню, двоїсту індикатрисі швидкостей.

На аналітичному рівні така геометрична інтерпретація виражається за допомогою диференціальних рівнянь. При цьому "вектор нормальної повільності"  $p$  не може бути повністю довільним: він задовольняє одну умову  $p\dot{q} = 1$ , що випливає з принципу Гюйгенса. Аналогічна умова накладається і на градієнт функції дії  $S$ .

Функцією дії  $S(q, t)$  називають інтеграл  $S_{q_0, t_0}(q, t) = \int_{\gamma} L dt$  уздовж екстремалі  $\gamma$ , що сполучає точки  $(q_0, t_0)$  і  $(q, t)$ .

У геометричній оптиці розглядають диференціал оптичної довжини шляху. Аналогічним їй є поняття диференціалу функції дії.

Згідно з теоремою Гамільтона, диференціал функції дії (при фіксованій точці  $(q_0, t_0)$ ) дорівнює  $d = pdq - Hdt$ , де  $p = \partial L / \partial \dot{q}$  і  $H = p\dot{q} - L$  визначаються за кінцевою швидкістю  $\dot{q}$  траєкторії  $\gamma$ .

**Теорема 2.2 (теорема Гамільтона – Якобі).** Функція дії збурення  $S(t)$  задовольняє рівнянню:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0. \quad (2.3)$$

Це нелінійне диференціальне рівняння першого порядку в частинних похідних називають *рівнянням Гамільтона – Якобі*. Характерною ознакою даного рівняння є те, що в його аналітичному вираженні відсутня шукана функція  $S$ .

Цією теоремою встановлюється зв'язок між траєкторіями механічної системи (променями) і рівнянням у частинних похідних (хвильовими фронтами).

Зв'язок променевої і хвильової точок зору дозволяє звести інтегрування рівняння в частинних похідних (2.3) до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь Гамільтона. Для цього для рівнянь Гамільтона – Якобі (2.3) ставиться задача Коші:

$$S(q, t_0) = S_0(q), \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0. \quad (2.4)$$

Щоб побудувати розв'язок задачі (2.4), розглянемо систему канонічних рівнянь Гамільтона  $\dot{p} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ ,  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$  з початковими умовами  $q(t_0) = q_0$ ,  $p(t_0) = \left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_{q_0}$ . Розв'язок, що відповідає цим початковим умовам, зображується в  $(q, t)$ -просторі кривою  $q = q(t)$ , тобто екстремаллю принципу  $\delta \int L dt = 0$  (*характеристикою*), де лагранжیان  $L(q, \dot{q}, t)$  є перетворенням Лежандра за  $p$  від функції Гамільтона  $H(p, q, t)$ . Якщо значення  $t_1$  є досить близьким до  $t_0$ , то характеристики, що виходять з близьких точок  $q_0$ , не перетинаються при  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $|q - q_0| < R$  (рис. 2.7).

Розв'язок задачі (2.4) має вигляд:

$$S(A) = S_0(q_0) + \int_{q_0, t_0}^A L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (2.5)$$

де інтегрування здійснюється уздовж характеристики, що веде до точки  $A$ .

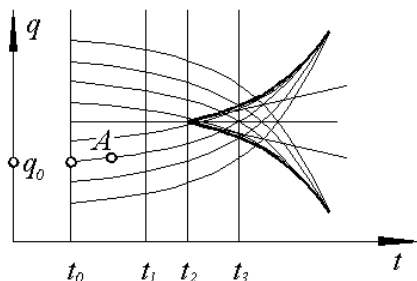


Рисунок 2.7 – Характеристики для розв'язання задачі Коші рівняння Гамільтона – Якобі

У механіці траєкторії руху також є екстремалами варіаційного принципу, тому механіка є ніби "геометричною оптикою". У таблиці 2.1 наведено аналогію між поняттями геометричної оптики і механіки.

Таблиця 2.1 – Аналогічні поняття геометричної оптики і механіки

Поняття геометричної оптики	Поняття механіки
Оптичне середовище	Розширений конфігураційний простір $\{(q, t)\}$
Принцип Ферма	Принцип Гамільтона $\delta \int L dt = 0$
Промені	Траєкторії $q(t)$
Індикатриса	Лагранжіан $L$
Нормальна повільність фронту $p$	Імпульс $p$
Вираження $p$ через швидкість променя $\dot{q}$	Перетворення Лежандра
1-форма $pdq$	1-форма $pdq - Hdt$
Оптична довжина шляху	Функція дії
Принцип Гюйгенса	Рівняння Гамільтона – Якобі

Рівняння (2.3) аналітично формулює принцип Гюйгенса. Дійсно, відповідно до принципу Гюйгенса кожна точка заданої хвильової поверхні є джерелом вторинних сферичних хвиль, і поле в точці спостереження утворюється в результаті суперпозиції всіх таких елементарних вторинних хвиль з урахуванням їх фаз. Хоча існують розв'язки задачі визначення векторів поля в деякій точці за заданим значенням цих векторів на деякій еквіфазній поверхні, для вивчення поширення хвиль часто буває зручніше застосовувати менш точний метод – метод геометричної оптики, в якому розглядаються послідовні положення еквіфазних поверхонь і зв'язані з ними системи променів.

### 2.2.2. Поняття рівняння ейконала

Рівняння ейконала описує поширення фронту збурення. При цьому динаміку руху фронту розуміють як хвильовий процес, тобто фронт збурення ототожнюється з фронтом хвилі.

Будь-яка з компонент амплітуди фізичного поля хвильової природи (наприклад, гідромеханічного, акустичного, світлового тощо) у вакуумі задовольняє хвильовому рівнянню:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.6)$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

У середовищі, в якому швидкість поширення хвиль має значення  $v$ , хвильове рівняння набуває для будь-якої з компонент вигляду:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.7)$$

де введено коефіцієнт заломлення  $n = c/v$  середовища відносно вакууму. Для монохроматичних хвиль з частотою  $\omega$  має місце тотожність:

$$\Phi(r, t) = \Psi(r) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (2.8)$$



і після підстановки (2.8) в (2.7) знаходимо рівняння для амплітуди  $\Psi(r)$ , що залежить тільки від координат:

$$\nabla^2 \Psi + n^2 k_0^2 \Psi = 0, \quad (2.9)$$

де  $k = w/c$  – хвильове число, що відповідає вакууму. Воно, очевидно, пов'язане з хвильовим числом  $k$  в середовищі таким співвідношенням:

$$k = nk_0. \quad (2.10)$$

Має місце тотожність:

$$\Psi(r) = A(r) \cdot e^{i \cdot S(r)}. \quad (2.11)$$

Два рівняння для визначення  $A(r)$  і  $S(r)$  мають вигляд:

$$\nabla^2 (\ln A) + [\text{grad}(\ln A)]^2 - (\text{grad} S)^2 + n^2 \cdot k_0^2 = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 S + 2 \text{grad}(\ln A) \cdot (\text{grad} S)^2 = 0. \quad (2.13)$$

Рівняння (2.12) і (2.13) значно спрощуються у випадку, коли амплітуда хвилі істотно змінюється на відстанях, які є набагато більшими, ніж довжина хвилі. Тому деякими членами, що входять у рівняння, можна знехтувати і записати рівняння (2.12) у вигляді співвідношення:

$$(\text{grad} S)^2 = n^2 \cdot k_0^2. \quad (2.14)$$

Диференціальне рівняння (2.14) одержало назву рівняння ейконала. За умови деяких спрощень щодо трактування хвильового процесу, воно описує проходження хвиль. Для рівняння ейконала використовують більш зручну форму запису:

$$(\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2 = 1. \quad (2.15)$$


---

Диференціальне рівняння (2.15) використовується для опису еквіфазних поверхонь хвильових процесів.

### 2.2.3. Розв'язок рівняння ейконала на основі варіаційного принципу Ферма

Наближений розв'язок рівняння ейконала здійснюється двома шляхами: на основі *варіаційного принципу Ферма* і на основі поняття *конусів Монжа*.

Рівняння ейконала у неоднорідному середовищі має вигляд:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \quad (2.16)$$

Для монохроматичної хвилі  $\Psi = -\omega t + \Psi_0(x, y)$  воно має вигляд:

$$\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.17)$$

Промені для подібної хвилі збігатимуться з характеристичними кривими для рівняння (2.17) і будуть спрямовані по нормалі до лінії  $\Psi_0(x, y) = \text{const}$ . Інакше кажучи, якщо записати їхні рівняння як функції довжини дуги кривої  $x(s), y(s)$  для компонентів дотичного вектора до кривої в точці перетину кривої з лінією, маємо  $n = (dx/ds, dy/ds)$ . Тоді рівняння для визначення променів записуються з умови колінеарності вектора нормалі та вектора  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{cases} \frac{dx(s)}{ds} = \frac{1}{k} \frac{\partial \Psi_0(x(s), y(s))}{\partial x} = \frac{1}{k} k_x, \\ \frac{dy(s)}{ds} = \frac{1}{k} \frac{\partial \Psi_0(x(s), y(s))}{\partial y} = \frac{1}{k} k_y, \end{cases} \quad (2.18)$$

де  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

---

Наступна група рівнянь отримується диференціюванням рівняння ейконала за  $x$  та  $y$  з урахуванням системи (2.18):

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial y} + \frac{2 \omega^2}{c^3} \frac{\partial c}{\partial x} &= 0, \\ 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} + \frac{2 \omega^2}{c^3} \frac{\partial c}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Похідні за  $c$  з'являються, якщо середовище поширення хвиль є неоднорідним. Оскільки  $k^2 = \omega^2/c^2$ , то

$$2k \frac{dk_x}{ds} - \frac{\partial k^2}{\partial x} = 0, \quad 2k \frac{dk_y}{ds} - \frac{\partial k^2}{\partial y} = 0.$$

Або у векторних позначеннях після скорочення на  $2k$  маємо:

$$\frac{dk}{ds} = \text{grad} k. \quad (2.20)$$

В однорідному середовищі  $k = \text{const}$ , і розв'язок рівняння буде таким:

$$k = \text{const},$$

тобто промені являють собою прямі лінії. Після підстановки в (2.20) виразів для  $k$  з (2.18) одержуємо рівняння для траєкторій променів:

$$-\frac{d}{ds} \left( k \frac{dr}{ds} \right) = \text{grad} k, \quad (2.21)$$

де  $r(s) = (x(s), y(s))$  – радіус-вектор променя.

Ці рівняння є екстремальними варіаційного принципу:

$$\delta \int_A^B k dr = \delta \int_A^B k ds = 0, \quad (2.22)$$

де  $A$  і  $B$  – початкова і кінцева точки променя. В оптиці цей принцип називають *варіаційним принципом Ферма* на честь відомого італійського ученого, який уперше експериментально відкрив його. Звичайно в оптиці він формулюється трохи інакше:

$$\delta \int_A^B n ds = 0, \quad (2.23)$$

де  $n$  – показник заломлення середовища порівняно з вакуумом. Але, зважаючи, що  $n = c / c_{\text{сеп}} = k_{\text{сеп}} / k$ , де  $c_{\text{сеп}}$  і  $k_{\text{сеп}}$  – відповідно, швидкість світла і довжина хвильового вектора в середовищі, а  $c$  і  $k$  – відповідно, те ж саме у вакуумі, та що добуток варіаційного принципу на постійне число не змінює рівнянь екстремалей, бачимо, що обидва формулювання є еквівалентними.

Вираз  $\int_A^B n ds$  має назву оптичної довжини шляху променя.

Варіаційний принцип Ферма формулюється наступним чином: *світло поширюється шляхом, оптична довжина якого є екстремальною, тобто вона є або максимальною, або мінімальною.*

#### 2.2.4. Закони оптики і варіаційний принцип Ферма

Розглянемо твердження про те, що з варіаційного принципу Ферма випливають закони заломлення і відбиття світла (вони формулюються аналогічно відповідним законам для звукових хвиль). Одночасно відзначимо і деякі відмінності. Наприклад, існують два види звукових хвиль у твердих тілах – поздовжні та поперечні. При падінні однієї з них на границю розділу двох середовищ відбита і заломлена хвиля будуть складатися з хвиль обох типів.

З рис. 2.8 видно, що внаслідок рівності кутів падіння і відбиття ( $i = i'$ ) довжина шляху  $AD + DB < AD' + D'B$  тобто при відбитті від плоскої поверхні довжина оптичного шляху  $ADB$  менша від довжини оптичного шляху  $AD'B$ .

При заломленні хвиль з принципу Ферма випливає закон синусів:  $\sin i / \sin i' = n_2 / n_1$ , де  $i$  та  $i'$  – відповідно, кути падіння і відбиття променя, а  $n_1$  та  $n_2$  – показники заломлення середовищ.

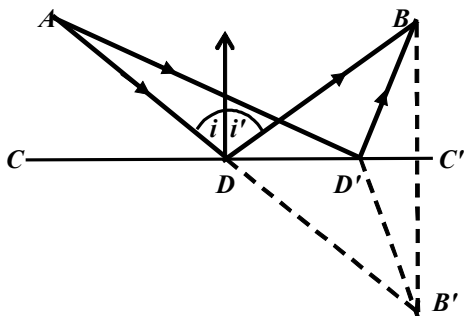


Рисунок 2.8 – Відбиття від плоскої лінії

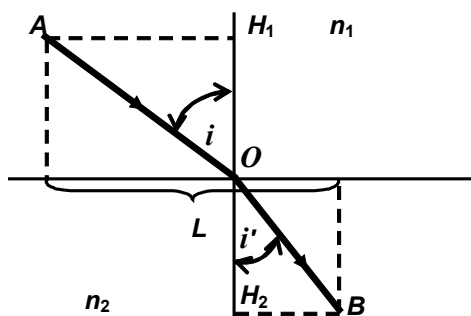


Рисунок 2.9 – Кути заломлення

Розглянемо шлях променя з точки  $A$  в точку  $B$  (рис. 2.9). З трикутників  $AOH_1$  і  $BOH_2$  обчислюються довжини відрізків  $AO$  та  $OB$  й, помноживши на показники заломлення першого і другого середовищ, визначається довжина оптичного шляху променя:

$$s = \frac{n_1 \cdot OH_1}{\cos i} + \frac{n_2 \cdot OH_2}{\cos i'}. \quad (2.24)$$

З іншого боку, з тих же трикутників випливає зв'язок між кутами падіння і заломлення:

$$OH_1 \cdot \operatorname{tgi} + OH_2 \cdot \operatorname{tgi}' = L. \quad (2.25)$$

Якщо продиференціювати (2.24) за  $i$  та прирівняти отриманий вираз до нуля, одержуємо умову екстремуму для оптичного шляху:

$$\frac{n_1 \cdot OH_1 \cdot \sin i}{\cos^2 i} + \frac{n_2 \cdot OH_2 \cdot \sin i'}{\cos^2 i'} \frac{di'}{di} = 0. \quad (2.26)$$

З (2.25) диференціюванням за  $i$  виражається похідна  $di'/di = -(OH_1 \cdot \cos^2 i' / OH_2 \cdot \cos^2 i)$  й підставляється в останній вираз. Після скорочень одержуємо:  $n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin i'$  що і потрібно було довести.

### **2.3. Особливості задач формоутворення сімей паралельних і квазіпаралельних кривих та поверхонь**

Паралельні множини зручно використовувати як математичну (або графічну) абстракцію для пояснення геометричних проявів деяких фізико-хімічних процесів або явищ. На основі поняття еквифазних (паралельних і квазіпаралельних) кривих і поверхонь будується загальний підхід до геометричного моделювання явищ і процесів для низки практичних задач.

Як уже відзначалося, сім'ї паралельних і квазіпаралельних кривих і поверхонь розглядаються як *узагальнені паралельні множини*. З точки зору фізики процесу це можна пояснити наступним чином. У деякому середовищі у просторі поширюється збурення (наприклад, фронт хімічної реакції, або коливання, або фронт лісової пожежі тощо). Джерело процесу має визначену форму у початковий момент часу  $t_0$ . На наступний момент часу  $t$  цей фронт змінився у просторі і набув певної геометричної форми. Залежно від властивостей середовища (однорідне або неоднорідне, ізотропне або неізотропне) ця нова геометрична форма фронту може бути еквідистантною (паралельною) початковій поверхні – поверхні джерела процесу – або нееквідистантною (квазіпаралельною) відносно початкової поверхні. Головним фізичним фактором, який має взаємний зв'язок з геометричною формою сім'ї паралельних і квазіпаралельних кривих та поверхонь, є саме енергетичний фактор.

---

Замість параметру часу можуть бути використані й інші параметри для характеристики певних фаз розвитку процесу, наприклад: відстань, тиск, температура, концентрація, напруга, кількість енергії та ін. Тоді паралельні та квазіпаралельні криві та поверхні являтимуть собою геометричну інтерпретацію розподілу фізичних параметрів поля тієї чи іншої природи (електричного, теплового, акустичного, гідродинамічного тощо). Таким чином, з позицій узагальнених паралельних множин розв'язується досить широкий клас задач, але обов'язковою умовою цих задач має бути наявність граничної поверхні або кривої, що визначає окремі фази перебігу процесу або явища.

Для прикладної геометрії становлять інтерес задачі геометричного моделювання явищ і процесів, що характеризуються поверхнею розділу фаз. У тривіальному випадку такі задачі зводяться до геометричного моделювання сім'ї паралельних кривих або поверхонь, що є моделями границь процесу у певні фази його розвитку. Шляхом вибору початкової геометричної форми поверхні розділу регулюється зміна в часі значення енергії, яка звільнюється або поглинається під час проходження процесу.

У таблиці 2.2 наведено дані щодо умов розв'язання задач моделювання картин перебігу явищ та процесів та їх геометричної інтерпретації.

*Задача 1.* Описати на площині сім'ю квазіпаралельних кривих, що є моделями фронтів лісових пожеж. За кількома зображеннями контурів, що відповідають певним моментам часу розвитку пожежі, спрогнозувати форму наступного контуру або визначити форму і розташування джерела горіння.

Тут актуальними є дві задачі. Перша полягає у відновленні проміжних зображень геометричних форм, які є графічним проявом фронтів пожежі (сім'ї квазіпаралельних кривих), за вузловими зображеннями певних фаз. Друга задача полягає у побудові зображень геометричних форм фронтів наступних фаз з метою визначення тенденції поширення пожежі.

*Задача 2.* Описати на площині або у просторі сім'ю еквіфазних кривих або поверхонь, що є моделями хвильових фронтів поширення збурення в середовищі. При цьому необхідно забезпечити таку форму фронту, щоб мати найвищий показник передачі потужності збурення у заданому напрямі та запобігти розсіюванню енергії в інших напрямках.

Таблиця 2.2 – Види процесів і явищ та їх геометрична інтерпретація

<b>Вид фізичного процесу або явища, що моделюється</b>	<b>Вхідні умови геометричної задачі</b>	<b>Фізичні величини (параметри), за якими будують сім'ю еквіфазних поверхонь</b>	<b>Результат</b>
Поширення фронтів лісових пожеж	Зображення початкових контурів	Параметр часу, координати	Сім'я кривих (фронтів) після екстраполяції
Хвильові збурення в середовищі (акустичні та ін.)	Рівняння, граничні умови	Параметр часу, координати точок, що належать фронту	Сім'я фронтів збурень (коливань однакової фази)
Теплові поля в газорозрядних джерелах світла	Геометричні форми і розташування елементів	Значення температури в об'ємі лампи	Еквіфазні поверхні однакового значення температури
Розподіл параметрів (концентрацій, тисків) у пластах газонафтових родовищ	Розташування свердловин, зображення початкової сітки ізоляцій	Координати, значення тисків, концентрацій тощо	Картини ізоляцій після інтерполяції або екстраполяції
Фільтрація в ґрунті	Рівняння, граничні умови	Значення напору та швидкостей руху струменів	Картина ліній однакового напору та ліній струменів
Силкові лінії електричного поля	Рівняння, граничні умови	Значення потенціалу та напруженості поля	Картина силкових ліній (еквіпотенціалей і ліній струму)
Поширення автохвильових процесів	Початкова математична модель (рівняння, граничні умови), розташування джерела і перешкод	Характеристики фаз перебування частинок середовища у станах збудження, спокою і рефрактерності	Графічні моделі фронтів проходження автохвиль



*Задача 3.* Описати у просторі поверхні, що є поверхнями однакових значень температури в об'ємі газорозрядного джерела світла (лампи).

У реальних лампах завжди спостерігається нерівномірність розподілу температури по поверхні колби, тобто нерівномірність розподілу енергії випромінювання. Зміна форми поверхні однакових значень температури вплине на форму конструктивних елементів і тим забезпечить рівномірний енергетичний потік по поверхні колби.

*Задача 4.* Описати в перерізі пластів газонафтових родовищ сім'ю кривих розподілу однакових значень параметрів (концентрацій, тисків тощо) та визначити розташування інших точок однакового значення цих параметрів.

Картини розподілу тисків, концентрацій та інших параметрів змінюються через процеси в ґрунтах. Важливою є перебудова картини за умови зміни значення того чи іншого параметра.

*Задача 5.* Описати на площині сім'ю кривих, що є графіками розподілу значень напору та швидкостей струменів у задачі фільтрації під гідротехнічною спорудою в нормальному перерізі.

Для інженерної практики інтерес становлять дослідження фізичних полів тисків і швидкостей рідини під греблями. Саме за цими полями розраховують зони, де можливе інтенсивне вимивання ґрунту, обчислюють тиски фільтраційного потоку на греблю, що впливає на ступінь її міцності, а також визначають витрати рідини з водоймища за рахунок фільтрації.

*Задача 6.* Описати в просторі еквіфазні поверхні, або на площині – сім'ю кривих, які відповідають поверхням і лініям однакового потенціалу електричного поля.

Задача про розподіл електричного струму на площині в заданій області є аналогічною задачі моделювання фільтрації ґрунтових вод під греблею. Тут поля розподілу електричного струму можна інтерпретувати як картину руху ґрунтових вод під греблею в нормальному перерізі.

*Задача 7.* Описати в просторі еквіфазні поверхні, або на площині – сім'ю кривих, які відповідають поверхням і лініям однакового потенціалу електростатичного поля, що утворюється в електрохімічному середовищі під час електрохімічної обробки деталей.

*Задача 8.* Описати на площині або у просторі графічні моделі перебігу в активному середовищі автохвильових процесів.

Наведені задачі містять типові приклади геометричних проявів у просторі та на площині процесів і явищ, для опису яких використовуються поняття еквіфазних поверхонь і кривих як геометричного вираження узагальнених паралельних множин.

Загальний підхід до геометричного моделювання картин перебігу явищ і процесів у вигляді схеми наведено на рис. 2.10.

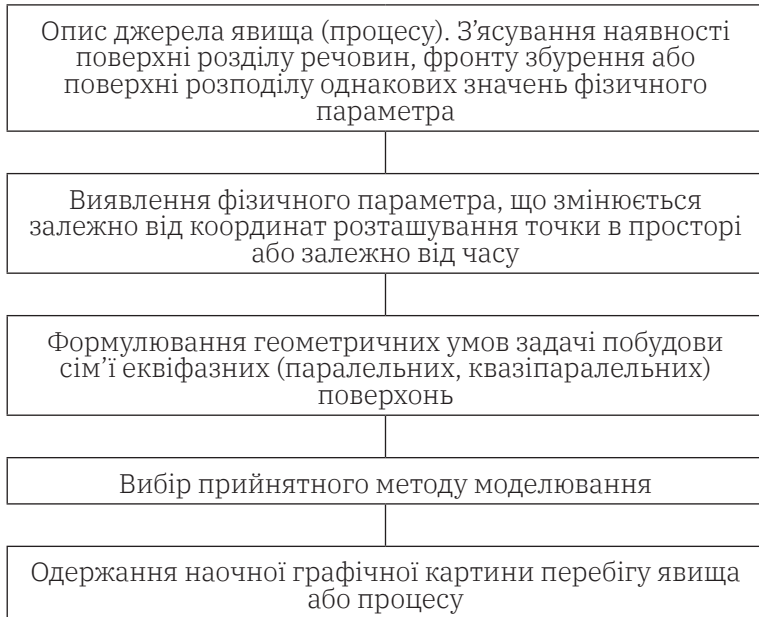


Рисунок 2.10 – Схема загального підходу до розв'язання задач геометричного моделювання еквіфазних поверхонь

Наочними розв'язками задач моделювання процесів і явищ є графічні картини еквіфазних поверхонь або кривих. Ці картини будуть адекватними моделями розв'язків тієї чи іншої прикладної задачі, якщо виконуються всі етапи запропонованого загального підходу.

## 2.4. Огляд методів опису паралельних і квазіпаралельних ліній і поверхонь

Під методами геометричного моделювання роздільних ліній і поверхонь розуміємо методи геометричного моделювання таких ліній і поверхонь, що є графічним поданням меж перебігу явищ і процесів у просторі за часом або є моделями розподілу у просторі фізичних параметрів. До таких методів належать методи поточкового перенесення, еволюти, обвідної, Мінковського та ін., іншими словами, методи *описів узагальнених паралельних множин*  $G_t$  – паралельних і квазіпаралельних ліній і поверхонь.

Тривіальний метод побудови паралельних кривих базується на *поточковому перенесенні* елементів (рис. 2.11):

$$x = \xi + t \cos \alpha; y = \eta + t \sin \alpha. \quad (2.27)$$

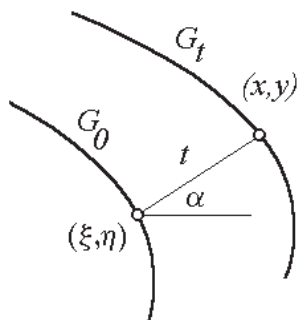


Рисунок 2.11 – Метод поточкового перенесення

Методи опису паралельної поверхні  $\Phi^*$  залежать від способу задання початкової поверхні  $\Phi$  у системі координат  $Oxyz$ . Передбачається, що її можна задати рівняннями в одній з наступних форм:

- неявній формі:  $F(x, y, z) = 0$ ;
- явній формі:  $z = f(x, y)$ ;
- параметричній формі:  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ .

**Першу** групу утворюють *методи побудови еквідистантних* (паралельних) *кривих для кривих другого порядку*. Ці методи знайшли

використання під час створення керуючих алгоритмів для верстатів із ЧПК. Вони ґрунтуються на відомій із диференціальної геометрії залежності між координатами  $x$  та  $y$  точок контуру креслення і координатами  $X$  і  $Y$  точок, що розташовані на відстані  $R$  на нормалях до цього креслення:

$$X = x \pm \frac{R \frac{\partial f(x)}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^2}}; Y = y \mp \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^2}}. \quad (2.28)$$

При цьому передбачається, що контур кривої задано явним рівнянням  $y=f(x)$ . У випадку неявного задання кривих другого порядку рівняння еквідистанти має вигляд:

– для параболи:

$$X^6 + AX^4 + BX^2 + C = 0, \quad (2.29)$$

де  $A, B$  і  $C$  – функції від  $p, R$  та  $Y$ ;

– для еліпса і гіперболи:

$$AX^8 + BX^6 + CX^4 + DX^2 + E = 0, \quad (2.30)$$

де  $A, B, C, D$  та  $E$  – функції від  $a, b, R$  та  $Y$ .

**Другу** групу складають методи опису паралельних кривих, де використовуються деякі характерні тільки для них прийоми.

*Метод еволюти – евольвенти.* Для побудови параметричного рівняння кривих, що будуть паралельними до деякої кривої, яку задано рівняннями  $X=X(t)$  та  $Y=Y(t)$ , необхідно спочатку описати обвідну нормалей даної кривої, тобто її еволюту (рис. 2.12):

$$x = X - Y_t \frac{X_t^2 + Y_t^2}{X_t Y_{tt} - Y_t X_{tt}}; y = Y - X_t \frac{X_t^2 + Y_t^2}{X_t Y_{tt} - Y_t X_{tt}}. \quad (2.31)$$

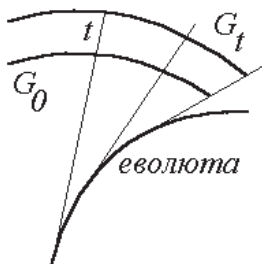


Рисунок 2.12 – Метод "еволюти – евольвенти"

Далі необхідно задати параметр відстані  $T$  між кривими й описати евольвенту еволюти за формулами:

$$x_T = x - \frac{\left( T - \int_{T_0}^T \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt \right) x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}; \quad y_T = y - \frac{\left( T - \int_{T_0}^T \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt \right) y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}. \quad (2.32)$$

У результаті одержимо елемент сім'ї паралельних кривих, що відповідає певному значенню  $T$ .

*Метод обвідної сім'ї кіл* із центрами на даній кривій. У цьому методі знаходять обвідну параметричної сім'ї кругів (рис. 2.13) як розв'язок системи нелінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} t^2 - (x - \lambda)^2 - [y - f(\lambda)]^2 &= 0; \\ (x - \lambda) + [y - f(\lambda)] \cdot f'(\lambda) &= 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де  $y=f(x)$  – рівняння початкової кривої  $G_0$ .

*Метод тангенціального рівняння.* Якщо рівняння кривої задати у тангенціальній формі  $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0$ , то є очевидним, що рівняння  $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) + t = 0$  опише криву (рис. 2.14), яка буде паралельною початковій. Тут  $q$  та  $p$  – полярні координати,  $t$  – відстань між кривими.

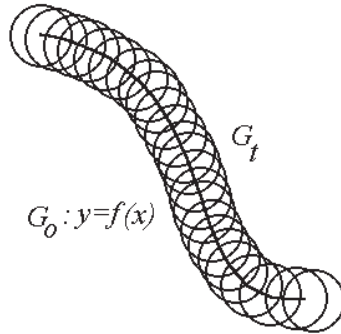


Рисунок 2.13 – Метод обвідної сім'ї кіл

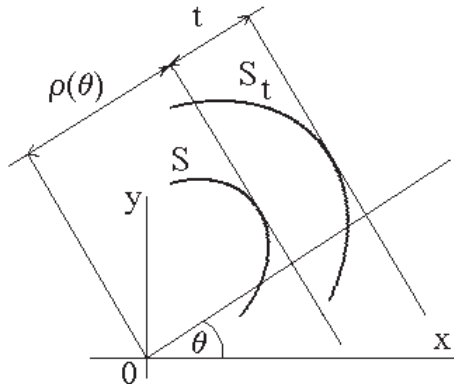


Рисунок 2.14 – Метод тангенціального рівняння

**Третю** групу методів складають *теоретико-множинні методи*. Метод суми Мінковського полягає в тому, що вводиться спеціальна операція (сума Мінковського). У результаті її застосування до двох складових фігур, одна з яких є кругом, утворюється третя фігура, контур якої розташований паралельно контуру початкової фігури (рис. 2.15). Цей метод, по суті, оснований на переборі різних векторних сум.

**Четверту** групу становлять *методи нормалей*. Ці методи найчастіше застосовують у просторових випадках.

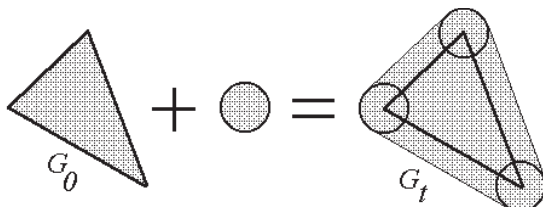


Рисунок 2.15 – Метод суми Мінковського

Поверхню  $\Phi^*$  називають паралельною поверхні  $\Phi$ , якщо вона складається з безлічі точок, які є кінцями відрізків однакової довжини  $h$ , відкладених на нормалях до поверхні  $\Phi$ .

Нехай поверхню задано у параметричному вигляді:  $r=r(u, v)$  (або у координатній формі:  $x=x(u, v)$ ;  $y=y(u, v)$  і  $z=z(u, v)$ ). На поверхні  $\Phi$  обираємо точку  $M(x, y, z)$  і з неї будемо вектор нормалі, координати якого визначаємо з виразів:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -1$$

або

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}.$$

Ці вирази складені залежно від форми задання поверхні  $\Phi$ . Тут  $X, Y$  і  $Z$  – поточні координати нормалі, а похідні обчислюються в точці  $M$ .

Далі на цих нормалях від точки  $M$  відкладаємо відрізок довжиною  $h$ , в результаті чого одержуємо координати точки  $A$  на паралельній поверхні  $\Phi^*$ .

Запишемо рівняння поверхні, що складається з множини точок, які є кінцями відрізків постійної довжини  $h$ , відкладених на

нормалях до даної поверхні від точок  $M$  цієї поверхні. Тобто опишемо поверхню, що буде паралельною початковій поверхні. У векторній формі рівняння паралельної поверхні має вигляд  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) + h\mathbf{n}(u, v)$ , де опис одиничного вектора нормалі  $\mathbf{n}$  буде такий:

$$n(u, v) = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & x_u \\ y_v & x_v \end{vmatrix}^2}}. \quad (2.34)$$

Отже, рівняння сім'ї паралельних поверхонь (де  $h$  – параметр) має вигляд:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= x(u, v) + h \frac{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & x_u \\ y_v & x_v \end{vmatrix}^2}}, \\ Y(u, v) &= y(u, v) + h \frac{\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & x_u \\ y_v & x_v \end{vmatrix}^2}}, \\ Z(u, v) &= z(u, v) + h \frac{\begin{vmatrix} y_u & x_u \\ y_v & x_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & x_u \\ y_v & x_v \end{vmatrix}^2}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$



Поверхня розділяє простір на два підпростори, тому вектори нормалей можна будувати з кожної точки початкової поверхні у двох протилежних напрямках. У таблиці 2.3 наведено опис однієї з двох паралельних поверхонь (для одного значення  $h$ ) залежно від форми задання початкової поверхні. Якщо замінити у формулах перед  $\lambda$  знаки "+" на "-", то можна одержати опис другої паралельної поверхні (для такого ж значення  $h$ ).

Таблиця 2.3 – Опис паралельної поверхні залежно від форми задання початкової поверхні

Неявна форма	Явна форма	Параметрична форма
$x_A = x_M + \lambda \xi_1;$ $y_A = y_M + \lambda \xi_2;$ $z_A = z_M + \lambda \xi_3,$	$x_A = x_M + \lambda \frac{\partial z}{\partial x};$ $y_A = y_M + \lambda \frac{\partial z}{\partial y};$ $z_A = z_M + \lambda,$	$x_A = x_M + \lambda \psi_1;$ $y_A = y_M + \lambda \psi_2;$ $z_A = z_M + \lambda \psi_3,$
<p>де</p> $\lambda = \frac{h}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}};$ $\xi_1^2 = \frac{\partial F}{\partial x};$ $\xi_2^2 = \frac{\partial F}{\partial y};$ $\xi_3^2 = \frac{\partial F}{\partial z}$	<p>де</p> $\lambda = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$	<p>де</p> $\lambda = \frac{h}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}};$ $\psi_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix};$ $\psi_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix};$ $\psi_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

**Приклад 2.1.** Визначити пари паралельних поверхонь, що розташовані від поверхні  $z = p(1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2})$  на відстані  $h$ .

Використовуючи наведені вище формули, одержуємо опис паралельної поверхні (опис другої поверхні матимемо, якщо змінимо знак при  $h$ ):

$$x_A = u \cos v - h \frac{p \sin u \cos v}{\sqrt{p^2 \sin^2 u + 1}};$$

$$y_A = u \sin v - h \frac{p \sin u \sin v}{\sqrt{p^2 \sin^2 u + 1}};$$

$$z_A = p(1 - \cos|u|) + h \frac{p}{\sqrt{p^2 \sin^2 u + 1}}.$$

На рис. 2.16 зображено паралельні поверхні 2 і 3, які розташовані від даної поверхні 1 на відстані  $h$  (при  $p=0,7$ ).

Недолік методу нормалей: цей метод прийнятний тільки для гладких (тобто без ребер) поверхонь  $\Phi$ , коли для кожної точки  $M$  поверхні  $\Phi$  можна визначити перпендикуляр. Крім того, у цих точках повинні існувати похідні функцій, за допомогою яких здійснюється опис початкової поверхні.

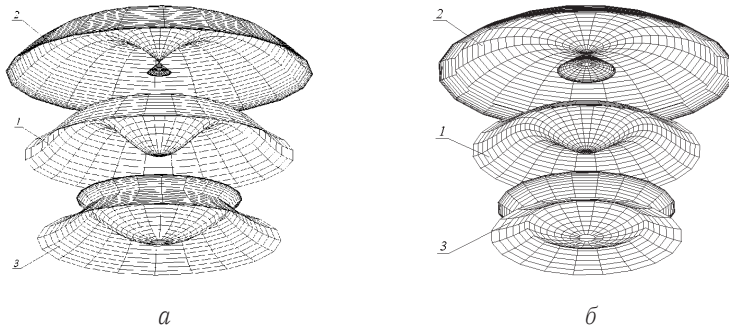


Рисунок 2.16 – Приклади поверхонь 2 і 3, паралельних початковій поверхні  $z = 0,7(1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2})$ : а –  $h = 3$ ; б –  $h = 5$

**П'яту** групу утворюють більш перспективні методи опису паралельних поверхонь за допомогою *нормалізованого рівняння*.

**Означення 2.5.** *Нормалізованим рівнянням* називають вираз вигляду:

$$\frac{F(x, y, z)}{\sqrt{F^2(x, y, z) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = 0$$

або

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{f^2(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} + 1} = 0.$$

Нормалізоване рівняння є основою опису паралельної поверхні  $\Phi$

$$\frac{F(x, y, z)}{\sqrt{F^2(x, y, z) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} - h = 0$$

або

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{f^2(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} + 1} - h = 0.$$

**Приклад 2.2.** Визначити пари паралельних поверхонь, що розташовані від поверхні "півкулі" радіуса  $R = 1,5$  на відстані  $h = 0,1$ .

Спочатку за допомогою  $R$ -кон'юнкції складемо рівняння півкулі у вигляді:

$$F(x, y, z) \equiv 2,25 - x^2 - y^2 - z^2 + z - \sqrt{(2,25 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + z^2} = 0.$$

Далі за допомогою нормалізанти:

$$\frac{F(x, y, z)}{\sqrt{F^2(x, y, z) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} - h = 0$$

одержуємо рівняння паралельної поверхні.

Тут

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(2,25 - x^2 - y^2 - z^2)}{\sqrt{(2,25 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + z^2}} - 2x;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y(2,25 - x^2 - y^2 - z^2)}{\sqrt{(2,25 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + z^2}} - 2y;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z(2,25 - x^2 - y^2 - z^2) + z}{\sqrt{(2,25 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + z^2}} - 2z + 1.$$

На рис. 2.17 зображено дві паралельні поверхні, що розташовані від даної поверхні на відстані  $h=0,1$  при  $R=1,5$ . Для наочності подано половину зображення.

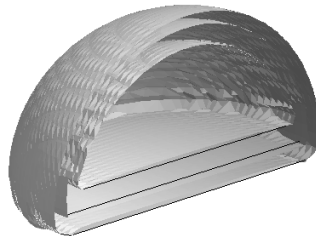


Рисунок 2.17 – Пари поверхонь, паралельних поверхні "півкулі"

**Шосту** групу складають методи опису квазіпаралельних кривих за допомогою *функцій комплексної змінної*. На рис. 2.18 наведено приклади конформних сіток, які побудовано за допомогою комплексних функцій і які можна вважати прикладами квазіпаралельних множин. Докладніше про це мова піде у розділі 3.

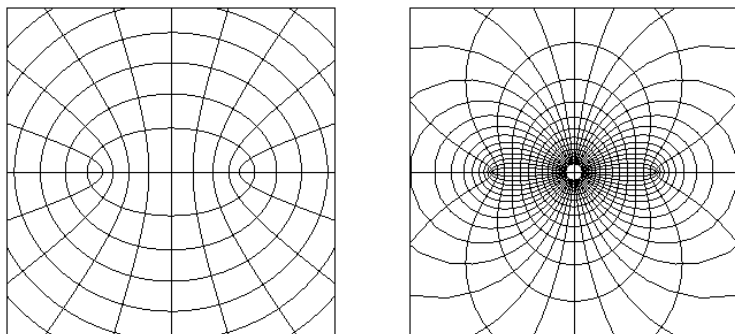


Рисунок 2.18 – Приклади квазіпаралельних кривих

До **сьомої** групи відносять методи опису і побудови сімей паралельних множин на основі точного або наближеного розв'язання диференціального рівняння у частинних похідних типу *рівняння ейконала*.

Сім'ю паралельних кривих на площині  $z=0$  у системі координат  $Oxy$  можна побудувати як множину суміщених проєкцій перерізів поверхні однакового нахилу (з кутом нахилу  $45^\circ$ ), що задовольняє рівнянню ейконала:

$$\left( \left| \text{grad } z(x,y) \right| \right)^2 \equiv \left( \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right)^2 = a. \quad (2.36)$$

*Класичний метод* розв'язання диференціального рівняння (2.36) полягає в наступному. Розглядаються характеристики, що проходять через деяку точку  $(\xi, \eta, \zeta)$  і твірний прямиий круговий конус Монжа з віссю, паралельною осі  $z$ . Цей конус є інтегральною поверхнею диференціального рівняння (2.52).

Нехай інтегральна поверхня  $z = z(x, y)$  для фіксованого  $x = \xi$  при  $-\infty < \eta < +\infty$  містить криву  $x = \xi, y = \eta, z = \omega(\eta)$ . Тоді маємо описи  $z(\xi, \eta) = \omega(\eta)$ . Звідси:

$$z_x(\xi, \eta) = \pm \sqrt{1 - \omega'^2}. \quad (2.37)$$

Позначимо  $p = \partial z / \partial x$  і  $q = \partial z / \partial y$ . Беручи до уваги характеристичні рівняння  $x'(t) = 2p, y'(t) = 2q, z'(t) = 2p^2 + 2q^2, p'(t) = 0, q'(t) = 0$ , маємо представлення шуканого інтеграла в параметричному вигляді:

$$x = \xi \pm 2t\sqrt{1 - \omega'^2}, \quad y = \eta + 2t\omega', \quad z = \omega(\eta) + 2t^2. \quad (2.38)$$

Для неявного опису необхідно з рівнянь (2.54) визначити параметри  $t$  і  $\eta$ . Наприклад, якщо  $\omega(\eta) = \alpha + \beta\eta$ , то розв'язок має вигляд:

$$z = \alpha + \beta y \pm (x - \xi)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (2.39)$$

У випадку, якщо  $\omega(\eta) = \gamma + \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1 + (\alpha + \beta\eta)^2}$ , маємо розв'язок:

$$z = \gamma + \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1 + \beta(x - \xi)^2 + (\alpha + \beta y)^2}. \quad (2.40)$$

Але на практиці використовувати формули (2.39) і (2.40) не зручно, оскільки шукана інтегральна поверхня, як правило, неоднозначна в напрямі осі  $Oz$ . Тому доцільно використовувати чисельні методи для інтегрування рівняння (2.36), які дозволяють будувати наочне зображення інтегральної поверхні. Наприклад, здійснити візуалізацію інтегральних поверхонь диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для конкретизації розв'язання необхідно зазначити початкову умову Коші у диференціальній формі. При цьому саме диференціальне рівняння слід подати у вигляді:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} z(x, y) \right)^2 = 1.$$

Як приклад побудуємо поверхню однакового нахилу, що на координатній площині  $Oxy$  спиралася б на циклоїду:

$$x = t - \sin t; y = 1 - \cos t. \quad (2.41)$$

На основі формули (2.39) загальний інтеграл запишемо у вигляді:

$$z = \sqrt{1 - c^2} (t - \sin(t)) + c(1 - \cos(t)).$$

Далі знаходимо похідну за  $t$  функції  $z$ :

$$dz = \sqrt{1 - c^2} (1 - \cos(t)) + c + \sin(t).$$

Остаточню шукану диференціальну умову Коші визначається в результаті вилучення параметра  $c$  з похідної  $dz$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} z(x, y) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right).$$

У результаті визначимо поверхні однакового нахилу, що спираються на циклоїду  $x = t - \sin t; y = 1 - \cos t$  (рис. 2.19).

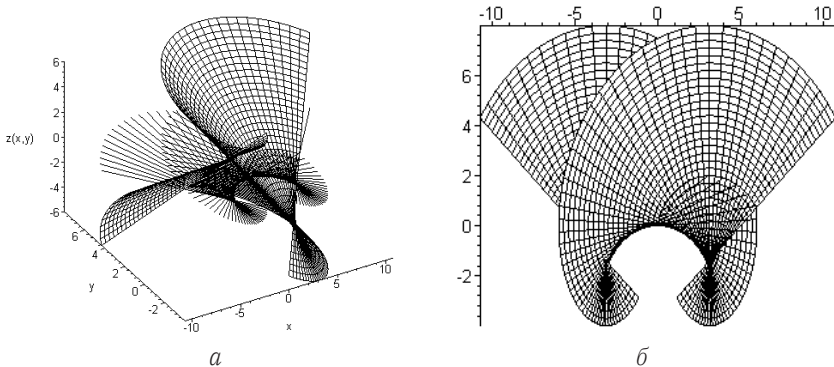


Рисунок 2.19 – Поверхня однакового нахилу для циклоїди  $x = t - \sin t; y = 1 - \cos t$ : *a* – аксонометричне зображення; *б* – проекція на площину  $z = 0$

На рис. 2.20 при  $z = \text{const}$  наведено приклади паралельних кривих для циклоїди.

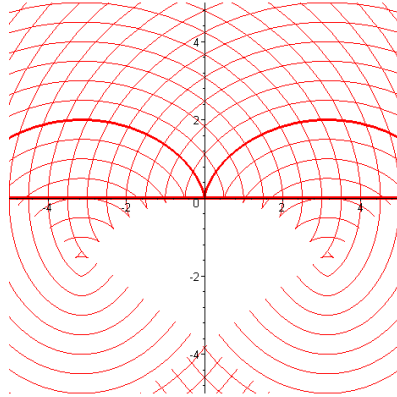


Рисунок 2.20 – Паралельні криві для циклоїди  
 $x = t - \sin t; y = 1 - \cos t$

Оскільки реальні фронти явища або процесу мають складну геометричну форму, то графіком шуканої функції буде інтегральна поверхня, отримана шляхом "деформування" поверхні однакового нахилу – графіка рівняння ейконала. "Деформований" характер інтегральної поверхні визначає непаралельний характер сім'ї фронтів для реальної фігури контуру.

**Наближений метод** розв'язання диференціального рівняння (2.36) реалізується двома шляхами: на основі *варіаційного принципу Ферма* і на основі *поняття конусів Монжа*.

Про варіаційний принцип Ферма йшлося в підрозділі 2.2. Більш перспективним є підхід до розробки *наближеного розв'язку рівняння ейконала, що спирається на поняття конусів Монжа*.

Для цього розглянемо спосіб розв'язання нелінійних рівнянь у частинних похідних першого порядку, який ґрунтується, значною мірою, на геометричних ідеях Коші (метод характеристик Коші). Рівняння в частинних похідних першого порядку має вигляд:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (2.42)$$



де використано позначення Монжа  $p = \partial z / \partial x$ ,  $q = \partial z / \partial y$ . Тоді рівняння ейконала матиме вигляд  $p^2 + q^2 = 1$ .

У просторі  $Oxyz$  площина, що проходить через точку  $P(x_0, y_0, z_0)$  з нормаллю, паралельною вектору  $\mathbf{n}$  з координатами  $(p_0, q_0, -1)$  однозначно визначається множиною чисел  $A(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ . І, навпаки, будь-яка така множина з п'яти дійсних чисел визначає площину в тривимірному просторі (рівняння цієї площини має вигляд  $z = z_0 + p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$ ). Тому множина  $A(x, y, z, p, q)$ , що складається з п'яти чисел, називається *плоским елементом простору*. Зокрема, плоский елемент  $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$  компоненти якого задовольняють рівнянню:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (2.43)$$

називається *інтегральним елементом рівняння* (2.43) у точці  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Рівняння (2.43) приводиться до вигляду:

$$q = G(x, y, z, p), \quad (2.44)$$

з якого  $q$  може бути обчислене при заданих значеннях  $x, y, z$  і  $p$ . Це приведення можливе в околі тих точок, де  $\partial F / \partial q \neq 0$  за умови, що функція  $F$  дійсно містить  $q$  (в іншому випадку  $F$  містить  $p$ , і змінні можна перепозначити, інакше (2.59) не було б рівнянням у частинних похідних).

Зафіксувавши  $x_0, y_0, z_0$  і змінюючи  $p$ , одержимо множину плоских елементів вигляду  $(x_0, y_0, z_0, p, G(x_0, y_0, z_0, p))$  що залежать тільки від  $p$ . При різних значеннях  $p$  отримуємо множину плоских елементів, які задають площини, що проходять через точку  $P$  (рис. 2.21), і які огинають конус з вершиною  $P$ . Конус, породжений таким способом, називається *елементарним конусом, або конусом Монжа*, рівняння у частинних похідних (2.44) у точці  $P$ .

Щоб розв'язати початкове рівняння (2.43), треба знайти характеристичне рівняння, для якого визначимо криву  $C$ , задану у вигляді:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (2.45)$$

Якщо в кожній своїй точці ця крива дотикається твірному елементарного конуса (2.43), то смуга, зв'язана з цією кривою, назива-

ється *характеристичною смугою*. *Смугою* називають конфігурацію, що складається з кривої і сім'ї дотичних до неї площин.

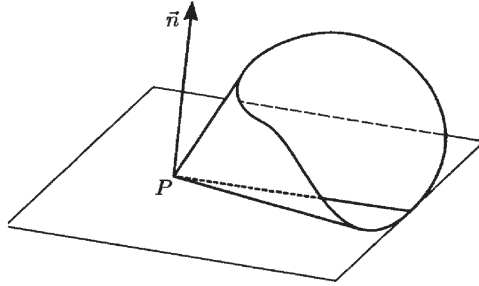


Рисунок 2.21 – Конус Монжа

Після певної послідовності дій маємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення характеристичної смуги:

$$\begin{aligned} x'(t) &= F_p, \quad y'(t) = F_q, \quad z'(t) = pF_p + qF_q, \\ p'(t) &= -(F_x + pF_z), \quad q'(t) = -(F_y + qF_z). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ці рівняння відомі як *характеристичні рівняння Коші* рівняння (2.43).

Тепер можемо розв'язати *задачу Коші*, тобто задачу про визначення інтегральної поверхні рівняння  $F(x, y, z, p, q) = 0$ , яка проходить через криву  $\Gamma$ , що має параметричні рівняння:

$$x = \phi(v), \quad y = \psi(v), \quad z = \chi(v). \quad (2.47)$$

Таким чином, беремо початкові значення  $x, y$  і  $z$  як функції від  $t$ , що задовольняють характеристичним рівнянням (2.46), у вигляді:

$$x_0 = \phi(v), \quad y_0 = \psi(v), \quad z_0 = \chi(v). \quad (2.48)$$

Тоді відповідні початкові значення  $p_0, q_0$  знаходимо зі співвідношень:

$$\begin{aligned} \chi'(v) &= p_0 \phi'(v) + q_0 \psi'(v), \\ F(\phi(v), \psi(v), \chi(v), p_0, q_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Якщо підставити ці вирази для  $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0$  разом з потрібним значенням  $t_0$  у загальний розв'язок характеристичних рівнянь (2.46), то одержимо, що  $x, y, z$  можуть бути виражені через параметри  $t, v$  у вигляді:

$$x = X_1(v, t), \quad y = Y_1(v, t), \quad z = Z_1(v, t), \quad (2.50)$$

тобто знайдено параметричні рівняння необхідної інтегральної поверхні, що проходить через криву  $\Gamma$ . Вилученням  $v$  і  $t$  з параметричних рівнянь можемо привести рівняння цієї поверхні до вигляду  $f(x, y, z) = 0$ .

Таким чином, коли гранична крива  $\partial G_0$  задана на інтервалі  $a \leq x \leq b$  рівнянням  $y = f(x)$ , наближений розв'язок рівняння ейконала відповідає наступній теоремі.

**Теорема 2.3.** Послідовність функцій

$$f_N(x, y) = \bigwedge_{i=0}^N \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - f(x_i))^2}, \quad (2.51)$$

де  $x_i = [(N - i)a + bi] / N$ , при  $n \rightarrow \infty$  збігається з функцією  $F(x, y)$ , що є точним розв'язком рівняння:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = 1 \quad (2.52)$$

з граничною умовою  $F(x, y) \Big|_{y=f(x)} = 0$ .

Для доведення розглянемо конус Монжа:

$$z = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - f(x_M))^2} \quad (2.53)$$

з вершиною, що належить точці  $M(xM, yM)$  кривої  $y=f(x)$ . Геометрично він збігається з верхньою полою прямої кругової конічної поверхні. Тому до описів послідовності конусів Монжа застосовується теорема В. Л. Рвачова про нормальну функцію з метою побудови поверхні, яка буде обвідною поверхнею сім'ї цих конусів.

Прикладом граничної кривої є парабола  $y=x^2$ . На рис. 2.22 зображено графік функції, що є наближеним розв'язком рівняння ейконала у випадку параболи на інтервалі  $0...1,8$ . На кривій обрано 10 точок  $x_i=0,2i$  (де  $i=0...9$ ), з якими збігалися вершини конусів Монжа. В програмі операція R-кон'юнкції реалізується у вигляді функції  $p(a, b) = (a + b - abs(a - b))/2$ . Вираз (2.51) у програмі має вигляд:

$$p(p(p(p(p(p(p(p(p(f_1, f_2), f_3), f_4), f_5), f_6), f_7), f_8), f_9), f_{10}), \quad (2.54)$$

де функціями  $f_i (i=0...9)$  описано відповідні конуси Монжа.

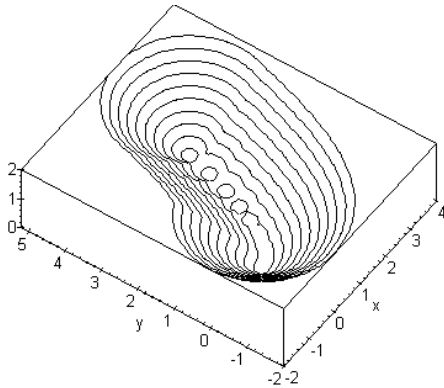


Рисунок 2.22 – Графік функції наближеного розв'язку рівняння (2.52), коли граничною кривою є парабола  $y=x^2$

Для порівняння, точний опис поверхні однакового нахилу для граничної кривої  $y=px^2$ :

$$16p^4(x^2+y^2-z^2)^3 - 8p^2(1-2py)^2(x^2+y^2-z^2)^2 + (1-2py) \times (x^2+y^2-z^2)(36p^2x^2 + (1-2py)^3) - x^2(27p^2x^2 + (1-2py)^3) = 0. \quad (2.55)$$

На рис. 2.23 зображено графік функції, яка є точним розв'язком рівняння (2.52) з граничною кривою  $y=x^2$  на інтервалі  $[-3, 3]$ .

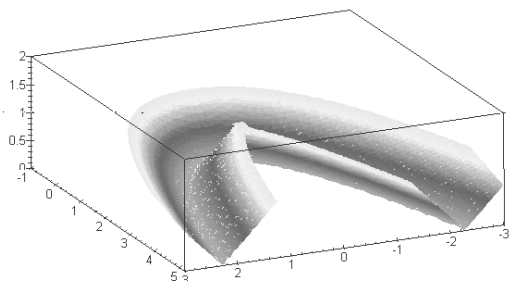


Рисунок 2.23 – Графік функції точного розв'язку рівняння (2.52), коли граничною кривою є парабола  $y=x^2$

На рис. 2.24 зображено лінії рівня для точного (на інтервалі  $[-3; 3]$ ) і наближеного (на інтервалі  $[0; 1,8]$ ) розв'язків рівняння ейконала для параболи як граничної кривої.

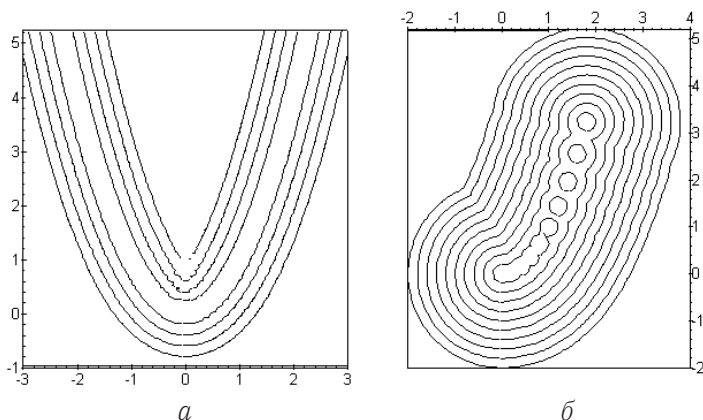


Рисунок 2.24 – Лінії рівня для точного (а) і наближеного (б) розв'язків

*Головним недоліком* більшості викладених методів є те, що вони спираються на операцію диференціювання. Адже це передбачає гладкість

початкової кривої або поверхні, що далеко не завжди виконується для реальних задач. Крім того, недоліки згаданих методів опису полягають у складності алгоритмічної реалізації у випадку, якщо за умовою конкретної задачі початкову фігуру необхідно редагувати.

Більш перспективною у цьому відношенні є **восьма** група методів, що спираються на поняття *нормальної функції*.

**Означення 2.6.** *Нормальним* називається рівняння  $F(x, y, z) = 0$  поверхні  $\Phi$ , якщо для будь-якої точки  $A(x, y, z)$ , що не належить поверхні  $\Phi$ , виконується співвідношення  $r(A, \Phi) = F(x, y, z)$ , де  $r(A, \Phi)$  – найкоротша відстань між точкою  $A$  і поверхнею  $\Phi$ .

У загальному вигляді проблему побудови нормальних рівнянь ще не вирішено.

**Приклад 2.3.** Рівняння поверхні, паралельної до поверхні куба зі стороною  $2a$  і розташованої від заданої поверхні на відстані  $h$ , має вигляд:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}|a+x| + \frac{1}{2}|a-x| - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}|a+y| + \frac{1}{2}|a-y| - a\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}|a+z| + \frac{1}{2}|a-z| - a\right)^2} - h = 0.$$

На рис. 2.25 наведено аксонометрії поверхні куба і паралельної поверхні при  $a = 1,5$  і  $h = 1$  (для наочності зображено половини поверхонь).



Рисунок 2.25 – Поверхня, паралельна до поверхні куба

Паралельні поверхні (криві) доцільно описувати за допомогою нормальних рівнянь і в результаті розв'язання диференціального рівняння в частинних похідних виду ейконала. У розділі 3 викладено *загальний метод побудови нормальних рівнянь* у двовимірному випадку, коли гладку криву задано у параметричному вигляді, та у тривимірному випадку, коли алгебраїчну поверхню другого порядку описано параметричними рівняннями.

### **Контрольні запитання та вправи**

1. Пояснити поняття паралельних і квазіпаралельних об'єктів.
2. Назвати дві концепції геометричного моделювання паралельних і квазіпаралельних множин.
3. Пояснити, що собою являє рівняння Гамільтона – Якобі.
4. На чому ґрунтується аналогія понять геометричної оптики і механіки?
5. Що описує рівняння ейконала?
6. Навести приклади процесів і явищ, в моделюванні яких доцільно використати поняття поверхні розділу або лінії розділу.
7. Пояснити схему загального підходу до розв'язання задач геометричного моделювання еквіфазних поверхонь.
8. Визначити групи методів опису паралельних і квазіпаралельних ліній і поверхонь.
9. Навести приклади паралельних і квазіпаралельних геометричних об'єктів.

### РОЗДІЛ 3. ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ МНОЖИН НА ОСНОВІ ПОНЯТТЯ НОРМАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Паралельні криві можна розглядати як проєкції перетину графіка нормальної функції низкою паралельних площин рівня. Для побудови сім'ї паралельних кривих складаються рівняння відповідної нормальної функції.

#### 3.1. Поняття та графічне подання нормальних функцій

У загальному випадку відшукування геометричного об'єкта  $L \in E^n$  за заданою функцією  $f(P)$  (*пряма задача аналітичної геометрії*; тут  $P = (x_1, \dots, x_n)$ ) являє собою задачу, яка має однозначний розв'язок. Тоді як побудова рівняння  $f(P) = 0$  за заданим геометричним об'єктом  $L \in E^n$  (*обернена задача аналітичної геометрії*) приводить до множини розв'язків, тобто до пучка функцій, рівних нулю на  $L$  і не рівних нулю поза  $L$ . Якщо ж між парами {функція  $f$ }  $\Leftrightarrow$  {геометричний об'єкт  $L$ } необхідно встановити однозначну відповідність, то слід розглянути також деякі додаткові умови, які дозволили б виділити єдиний розв'язок з множини можливих розв'язків оберненої задачі аналітичної геометрії. Але для цього необхідно "вийти за межі" геометричного об'єкта  $L$  і розглянути поведінку функції  $f$  скрізь в  $E^n$ . Зокрема, найпростіший спосіб зв'язати між собою функцію  $f$  та об'єкт  $L$  полягає у виконанні умови:

$$F(P) = \inf_G \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2} \quad (G = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in L), \quad (3.1)$$

яка означає, що серед множини можливих функцій, рівних нулю на  $L$  (і ніде більше), повинна бути обрана така, яка дорівнює найкоротшій відстані від будь-якої точки  $P$  до геометричного об'єкта  $L$ .



Функцію  $f(P)$ , що задовольняє умову (3.1), прийнято називати *нормальною функцією*  $L$ , а рівняння  $f(P)=0$  – *нормальним рівнянням* об'єкта  $L$ .

При цьому "проекції" в простір  $E^n$  сім'ї перерізів графіка функції  $\xi=f(P)$  гіперплощинами рівня  $\xi=\text{const}$  будуть ілюструвати графічні об'єкти, які умовилися називати гіперповерхнями, паралельними початковій гіперповерхні об'єкта  $L$ .

Розглянемо *графічну реалізацію методу опису та побудови ліній, які будуть задовольняти умову паралельності до даної лінії* у випадку, коли в прямокутній системі координат  $Oxyz$  початкову лінію задано рівнянням у явному вигляді  $y=F(x)$ .

Розглянемо сім'ю кривих  $\{\partial G_t\}$ , елементами якої будуть криві, що паралельні початковій кривій  $\partial G_0$ . Опис сім'ї  $\{\partial G_t\}$  можна здійснити за допомогою нормального рівняння  $z=F(x, y)$  кривої  $\partial G_0$ . Ця можливість впливає з властивості графіка функції  $F(x, y)$ , який має вигляд лінійчатої поверхні однакового нахилу; при цьому твірна поверхні буде нахилена до координатної площини під кутом  $45^\circ$ . Тоді лініями рівня цього графіка при  $z=t$  будуть паралельні криві  $\partial G_t$  (зауважимо, що при  $z=0$  маємо  $\partial G_0$ ).

Наочно графік нормальної функції можна уявити як поверхню шару сухого піску на координатній площині  $Oxy$  за умови, що частина його висиплеться через "отвір" у площині, який має форму кривої  $\partial G_0$ . Крім того, рівняння  $z=F(x, y)$  поверхні однакового нахилу буде задовольняти диференціальному рівнянню ейконала:

$$\left(\|\text{grad}F(x, y)\|\right)^2 \equiv \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right)^2 = 1. \quad (3.2)$$

На цей факт звернув увагу ще Г. Монж.

**Твердження 3.1.** *Графік функції  $F(x, y)$  матиме вигляд лінійчатої поверхні однакового нахилу тоді, коли функція задовольнятиме умову (3.2).*

Нехай задано дійсну функцію  $f(x, y)$  і точку  $A(x_a, y_a)$ . Академік В. Л. Рвачов ввів такі означення.

**Означення 3.1.** *Креслеником функції  $F(x, y)$  називається геометричний об'єкт  $L$ , який складається з тих точок площини  $z=0$ , для яких  $f(x, y)=0$ .*

Кресленик функції  $F$  можна трактувати як множину точок, спільних для координатної площини і графіка цієї функції. Математичне поняття "кресленик функції" є узагальненням таких понять, як "точка", "крива", "ділянка координатної площини" тощо. Під креслеником функції  $F(x, y)$  будемо розуміти геометричні об'єкти  $G_0$ , що належать до розглянутого вище класу, для яких необхідно описати сім'ю паралельних ліній  $G_t$ .

*Геометрична інтерпретація алгоритму опису паралельних ліній за допомогою рівнянь* полягає в описі сім'ї паралельних ліній, який слід шукати серед рівнянь вигляду  $t = F(x, y)$ , де функція  $F$  вибирається з урахуванням геометричної форми  $G_0$ , а також з урахуванням необхідних властивостей паралельності ліній рівня її графіка. При цьому графік згаданої функції  $F$  повинен збігатися з поверхнею однакового нахилу.

Позначимо через  $\rho(L, A)$  найкоротшу відстань між креслеником  $L$  і точкою  $A$ .

**Означення 3.2.** Вважають, що функцію  $F(x, y)$  подано у нормальній формі тоді, коли виконується тотожність  $f(x_a, y_a) = \rho(L, A)$ .

У тривимірному просторі графіком  $G$  нормальної функції  $z = F(x, y)$  буде поверхня однакового нахилу з кутром нахилу  $45^\circ$ .

**Приклад 3.1.** Нормальна функція точки  $P(x_p, y_p)$  має вигляд:

$$\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}. \quad (3.3)$$

Графіком нормальної функції точки буде верхня частина прямої кінцевої поверхні з вершиною в точці  $P$ .

**Приклад 3.2.** Нормальна функція відрізка  $a \leq x \leq b$  осі  $Ox$  має вигляд:

$$\sqrt{y^2 + ((x \vee a) - (x \wedge b))^2}. \quad (3.4)$$

Тут і далі символами  $\vee$  і  $\wedge$  позначено  $R_1$ -диз'юнкція  $\alpha \vee \beta = (\alpha + \beta + \alpha - \beta)/2$  та  $R_1$ -кон'юнкція  $\alpha \wedge \beta = (\alpha + \beta - \alpha - \beta)/2$ .

Графік нормальної функції відрізка наведено на рис. 3.1.

**Приклад 3.3.** Нормальна функція прямокутника  $a \leq x \leq b$ ;  $c \leq y \leq d$  має вигляд:

$$\sqrt{\left(\left(x \vee a\right) - \left(x \wedge b\right)\right)^2 + \left(\left(y \vee c\right) - \left(y \wedge d\right)\right)^2}. \quad (3.5)$$

Паралельні криві розглядаються як проєкції перетину графіка нормальної функції рядом паралельних площин рівня.

Для побудови низки паралельних кривих необхідно навчитися складати рівняння відповідної нормальної функції. Проте відомі аналітичні методи побудови нормальної функції для даного кресленника не є універсальними. Це ілюструють графічні побудови.

Нехай задані нормальні функції  $f_1$  і  $f_2$  з креслениками  $L_1$  і  $L_2$  та графіками  $G_1$  і  $G_2$ . Припустимо, що графіки  $G_1$  і  $G_2$  можуть взаємно "затінити" один одного для різних напрямів їх "освітлення", бо вони "виготовлені з непрозорого матеріалу".

**Твердження 3.2.** Графік  $G_{max}$  функції  $f = f_1 \vee f_2$  утворений освітленими фрагментами графіків  $G_1$  і  $G_2$  за умови, що напрям освітлення є зворотним до напрямку осі  $Oz$ .

Знаки  $\wedge$  та  $\vee$  на рівні мнемонічного прийому можна трактувати як "наконечники стріл", що вказують напрямки освітлення.

**Приклад 3.4.** Розглянемо два відрізки  $\{(2; 1) - (2; 5)\}$  і  $\{(2; 3) - (6; 3)\}$ , розташовані на координатній площині  $z = 0$  у формі літери "T".

На рис. 3.1 і 3.2 наведено графіки  $G_1$  і  $G_2$  нормальних функцій цих відрізків.

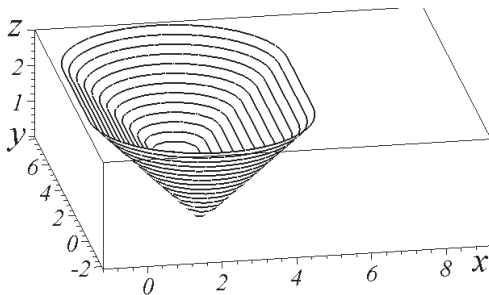


Рисунок 3.1 – Графік нормальної функції для першого відрізка

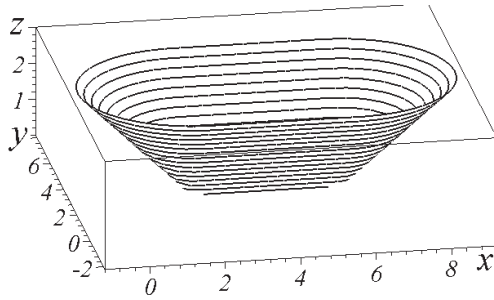


Рисунок 3.2 – Графік нормальної функції для другого відрізка

На рис. 3.3 і 3.4 зображено графіки  $G_{max}$  і  $G_{min}$ .

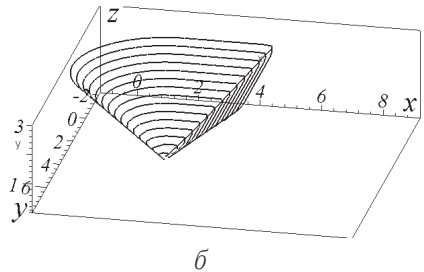
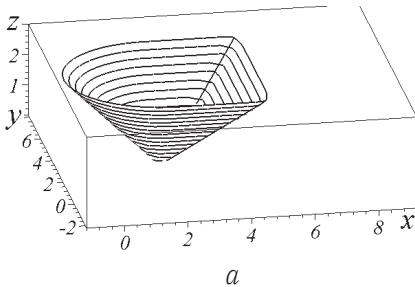


Рисунок 3.3 – Різні ракурси графіка  $G_{max}$  нормальної функції фігури перетину відрізків (б – вид "знизу")

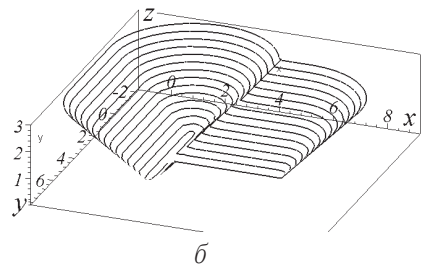
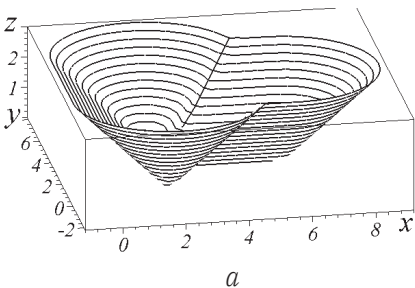


Рисунок 3.4 – Різні ракурси графіка  $G_{min}$  нормальної функції фігури об'єднання відрізків (б – вид "знизу")

На рис. 3.5 зображено лінії, паралельні  $T$ -подібній фігурі, які пояснюються як проєкції на координатну площину перерізів графіка нормальної функції площинами рівня.

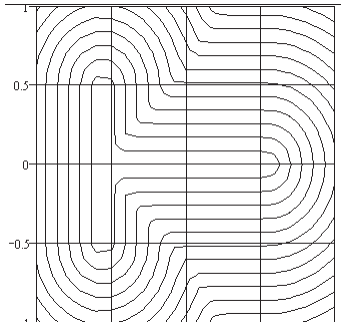


Рисунок 3.5 – Лінії, паралельні фігурі об'єднання двох відрізків

**Твердження 3.3 (теорема В. Л. Рвачова).**  $R$ -кон'юнкція  $f = f_1 \wedge f_2$  буде нормальною функцією для кресленика  $L = L_1 \cup L_2$ .

Це ключове для побудови нормальних функцій твердження, автором якого є В. Л. Рвачов, пояснює приклад на рис. 3.4, б, де зображено "вигляд знизу" графіка  $G_{min}$  нормальної функції літери "Т", тобто фігури об'єднання двох відрізків.

**Твердження 3.4.** Найкоротша відстань  $\rho(L_1, L_2)$  між об'єктами  $L_1$  і  $L_2$  дорівнює подвоєному значенню мінімуму  $R$ -диз'юнкції  $f = f_1 \vee f_2$  нормальних функцій, які входять до опису цих об'єктів.

Це твердження пояснює приклад  $R$ -диз'юнкції  $f = f_1 \vee f_2$  нормальних функцій відрізків, які не перетинаються. На рис. 3.6 сумісно зображено графіки нормальних функцій таких відрізків, а також графік  $R$ -диз'юнкції  $f = f_1 \vee f_2$  (його виділено).

На рис. 3.7 наведено вигляд цих самих графіків у напрямі осі  $Oy$ . Точка  $A$  буде екстремальною для графіка  $R$ -диз'юнкції (точкою мінімуму функції  $f = f_1 \vee f_2$ ). Враховуючи те, що графіком нормальної функції відрізка буде поверхня однакового нахилу з кутом нахилу  $45^\circ$ , маємо:  $AB = CB = BD$ . Звідси одержуємо доведення твердження 3.4. Дійсно, найкоротша відстань між відрізками дорівнює подвоєному значенню мінімуму  $R$ -диз'юнкції нормальних функцій, які входять до їх опису.

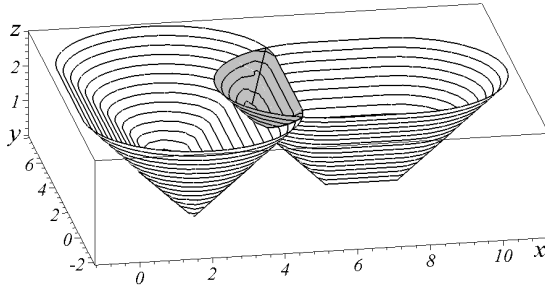


Рисунок 3.6 – Сумісне зображення двох графіків нормальних функцій відрізків і графіка їх  $R$ -диз'юнкції (виділено)

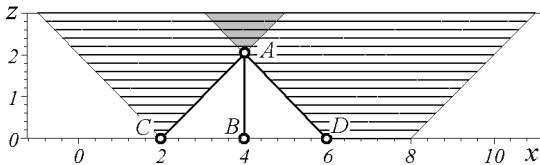


Рисунок 3.7 – Вигляд графіків нормальних функцій відрізків і графіка їх  $R$ -диз'юнкції у напрямі осі  $Oy$

Твердження, яке було б двоїстим твердженню В. Л. Рвачова, не існує. Адже  $R$ -диз'юнкція  $f=f_1 \vee f_2$  не буде нормальною функцією для кресленика  $L=L_1 \cap L_2$ . У цьому легко переконає приклад на рис. 3.3, де очевидною є відмінність графіка  $G_{max}$  від конічної поверхні – графіка нормальної функції точки перетину відрізків.

Відсутність двоїстого твердження не дозволяє створювати загальні алгоритми побудови нормальної функції даного кресленика. Тому на практиці використовують штучні прийоми побудови. Як приклад такого "штучного прийому" розглянемо побудову нормальних функцій для довільного відрізка і паралелепіпеда.

**Твердження 3.5.** Нормальна функція відрізка, що з'єднує точки  $A(x_a, y_a, z_a)$  і  $B(x_b, y_b, z_b)$ , має вигляд:

$$\xi = \sqrt{\frac{(f_a \wedge 0)^2 + (f_b \vee 0)^2 + \omega^2}{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}}, \quad (3.6)$$

де  $f_a = (x_b - x_a)(x - x_a) + (y_b - y_a)(y - y_a) + (z_b - z_a)(z - z_a)$ ;  
 $f_b = (x_b - x_a)(x - x_b) + (y_b - y_a)(y - y_b) + (z_b - z_a)(z - z_b)$ ;

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ x_a & z_a & 1 \\ x_b & z_b & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_a & z_a & 1 \\ y_b & z_b & 1 \end{vmatrix}^2.$$

**Твердження 3.6.** Розглянемо паралелепіпед  $T$ , поверхня якого обмежена паралельними площинами  $\{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; p \leq z \leq q\}$ . Тоді нормальна функція для паралелепіпеда  $T$  має вигляд:

$$\xi = \sqrt{[(x \vee a) - (x \wedge b)]^2 + [(y \vee c) - (y \wedge d)]^2 + [(z \vee p) - (z \wedge q)]^2}. \quad (3.7)$$

Наведена функція буде нормальною й у випадку загального розташунку паралелепіпеда стосовно координатних площин. Крім того, паралельні грані можуть збігатися. Зазначимо, що у випадку злиття двох пар граней одержимо функцію з властивостями (3.6).

На рис. 3.8 при  $\xi = 0,05$  і  $\xi = 1,5$  зображено поверхні рівня нормальної функції паралелепіпеда  $T \{2 \leq x \leq 5; 3 \leq y \leq 5; 2 \leq z \leq 3\}$ .

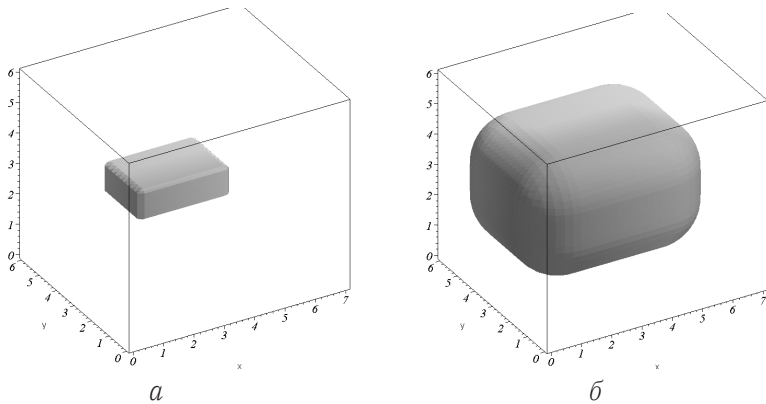


Рисунок 3.8 – Поверхня рівня нормальної функції паралелепіпеда:  
 $a - \xi = 0,05$ ;  $b - \xi = 1,5$

На рис. 3.9 зображено результат виконання програми (отвори утворені внаслідок перетину поверхонь з координатними площинами).

Засобами комп'ютерної графіки зручно спостерігати момент "дотику" поверхонь рівня в точці, яка розташована на відрізку мінімальної відстані. При цьому, згідно з твердженням 3.4, змінюючи величину  $\xi = \xi_T$ , на екрані комп'ютера можна спостерігати перетин поверхонь рівня. Момент дотику ідентифікується завдяки "зникненню" об'єкта-перетину (рис. 3.10). Тобто в інтерактивному режимі можна наближено визначати відстань між відрізком і паралелепіпедом (для обраного випадку ця відстань наближено дорівнює 3,6 од.).

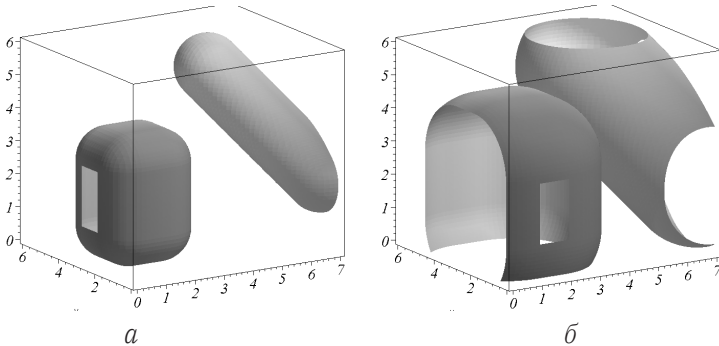


Рисунок 3.9 – Поверхні рівня нормальних функцій для відрізка і паралелепіпеда:  $a - \xi = 1$ ;  $b - \xi = 2$

На практиці на площині  $Oxy$  паралельні лінії для гладких кривих  $X=X(t)$ ;  $Y=Y(t)$  можна описувати рівняннями. А саме, рівняння паралельної кривої, яка розташована на відстані  $z$  від даної кривої, матиме вигляд:

$$x = X - \frac{z \frac{dY}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}}; \quad y = Y + \frac{(X-x) \frac{dX}{dt}}{\frac{dY}{dt}}. \quad (3.8)$$



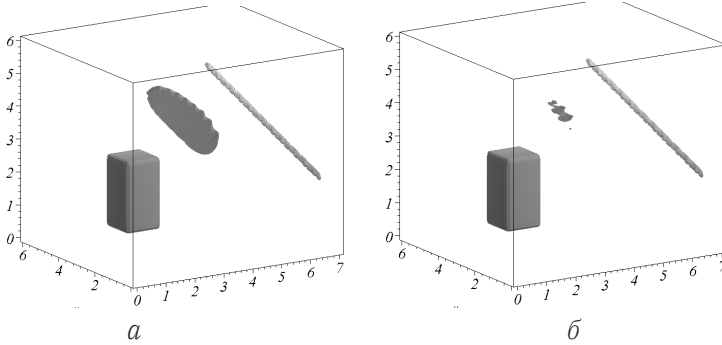


Рисунок 3.10 – Перетин поверхонь рівня:  $a - \xi = 2,1$ ;  $b - \xi = 1,9$

На рис. 3.11 наведено зображення кривих, паралельних до еліпса  $x = 2\cos t$ ;  $y = \sin t$ . Ліворуч зображено зовнішні паралельні криві, праворуч – внутрішні паралельні криві. При цьому "відстані" від початкової кривої обрано однаковими.

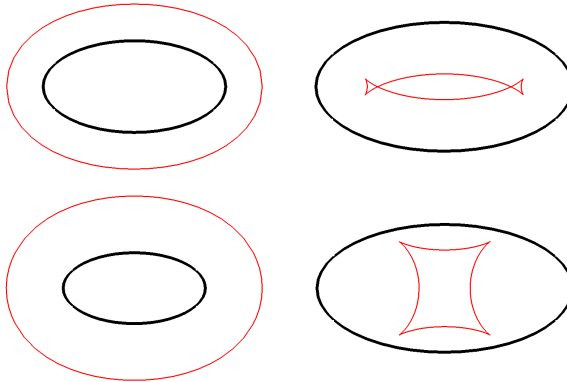


Рисунок 3.11 – Криві, паралельні до еліпса

На рис. 3.12 наведено лінії, які будуть паралельними до кардіоїди:

$$x = 4\sin t - 2\sin 2t; \quad y = 4\cos t - 2\cos 2t.$$

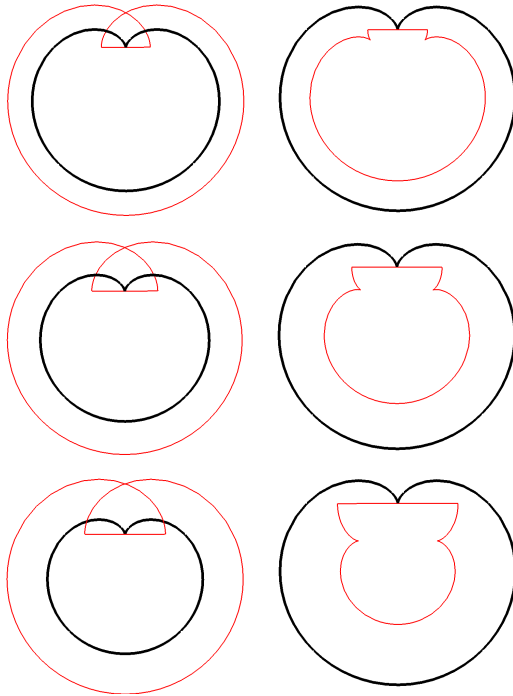


Рисунок 3.12 – Лінії, паралельні до кардіоїди

### 3.2. Алгоритм побудови нормальних функцій для плоских кривих

Нехай плоску гладку криву задано у параметричному вигляді.

**Означення 3.3.** Для плоскої фігури  $G$  на координатній площині  $Oxy$  нормальною називається така функція  $f(x, y)$ , для якої виконується тотожність  $f(x_a, y_a) = \rho(T, A)$  для довільної точки  $A(x_a, y_a)$ , що розташована за межами об'єкта  $G$ . Тут через  $\rho(T, A)$  позначено найкоротшу відстань між контуром фігури  $G$  і точкою  $A$ . При цьому проєкції на площину  $Oxy$  сім'ї перерізів графіка функції  $f(x, y)$  площинами рівня  $z = \text{const}$  ілюструють графічні об'єкти, які умовилися називати кривими, паралельними контуру фігури  $G$ .

Нехай у прямокутній системі координат  $Oxy$  маємо початкову криву  $x = \varphi(t); y = \psi(t)$ , де  $t$  – параметр. Оберемо на площині довільну точку  $T(x, y)$  і розглянемо функцію:

$$f(x, y) = \sqrt{(x - \varphi(t))^2 + (y - \psi(t))^2}. \quad (3.9)$$

Значення функції (3.9) у точці  $T$  дорівнює відстані між  $T$  і точкою  $M$  на кривій, яка відповідає конкретному значенню параметра  $t$ . Визначимо значення  $t$ , яке "забезпечує" мінімальну відстань  $\inf(\text{dist}(T, M))$ . Для цього спочатку обчислюємо похідну:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial t} = - \frac{(x - \varphi(t)) \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} + (y - \psi(t)) \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}}{\sqrt{(x - \varphi(t))^2 + (y - \psi(t))^2}} \quad (3.10)$$

і розв'язуємо відносно  $t$  рівняння, одержане з виразу (3.10):

$$(x - \varphi(t)) \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} + (y - \psi(t)) \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = 0. \quad (3.11)$$

Далі знайдене (дійсне) значення  $t_0$  підставляємо у вираз (3.9). Тоді одержана функція:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(x - \varphi(t_0))^2 + (y - \psi(t_0))^2} \quad (3.12)$$

матиме властивості нормальної функції. Тобто рівнянням:

$$f_N(x, y) = \text{const} \quad (3.13)$$

буде описано сім'ю кривих з елементами, паралельними (або еквідистантними чи еквіфазними) відносно кривої  $x = \varphi(t); y = \psi(t)$ . Зазначимо, що в просторі  $Oxyz$  рівнянням  $z = f_N(x, y)$  буде описано лінійчату поверхню однакового нахилу, тобто поверхню, у якій всі твірні утворюють кути  $45^\circ$  з площиною  $Oxy$ .

**Приклад 3.5.** Для параболи  $x = t; y = t^2$  маємо рівняння, яке одержано з виразу, що входить до чисельника похідної:

$$2t^3 + (1 - 2y)t - x = 0. \quad (3.14)$$

Знаходимо дійсний корінь рівняння (3.14):

$$t_0 = \frac{\sqrt[3]{\left(54x + 6\sqrt{6 - 36y + 72y^2 - 48y^3 + 81x^2}\right)^2 - 6 + 12y}}{6\sqrt[3]{54x + 6\sqrt{6 - 36y + 72y^2 - 48y^3 + 81x^2}}}. \quad (3.15)$$

У результаті за умови  $t > 0$  одержуємо першу гілку нормального рівняння параболи:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(x - t_0)^2 + (y - t_0^2)^2}, \quad (3.16)$$

де значення  $t_0$  визначається тотожністю (3.15).

У випадку  $t < 0$  для параболи  $x = -t$ ;  $y = t^2$  маємо рівняння, яке одержано з виразу, що входить до чисельника похідної:

$$2t^3 + (1 - 2y)t + x = 0. \quad (3.17)$$

Знаходимо дійсний корінь рівняння (3.17):

$$t_0 = \frac{\sqrt[3]{\left(-54x + 6\sqrt{6 - 36y + 72y^2 - 48y^3 + 81x^2}\right)^2 - 6 + 12y}}{6\sqrt[3]{-54x + 6\sqrt{6 - 36y + 72y^2 - 48y^3 + 81x^2}}}. \quad (3.18)$$

Отже, за умови  $t < 0$  одержуємо другу гілку нормального рівняння параболи:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(x + t_0)^2 + (y - t_0^2)^2}, \quad (3.19)$$

де значення  $t_0$  визначається тотожністю (3.18).

На рис. 3.13 у системі координат  $Oxyz$  зображено графік функції  $z = f_N(x, y)$ . Він має вигляд лінійчатої поверхні однакового нахилу, у якій всі твірні утворюють кути  $45^\circ$  з площиною  $Oxy$ .

Недолік опису нормальної функції параболі за допомогою формул (3.16) і (3.19) полягає у вилученні з розгляду точок області  $y > x^2$ . На аналітичному рівні це пояснюється наявністю у формулах (3.15) і (3.18) виразів типу "радикал під радикалом".

На рис. 3.14 наведено криві, які будуть паралельними (еквідистантними або еквіфазними) розглянутій параболі. Їх можна одержати як проєкції на площину  $Oxy$  перерізів графіка нормальної функції  $z = f_N(x, y)$  площинами рівня  $z = \text{const}$ .

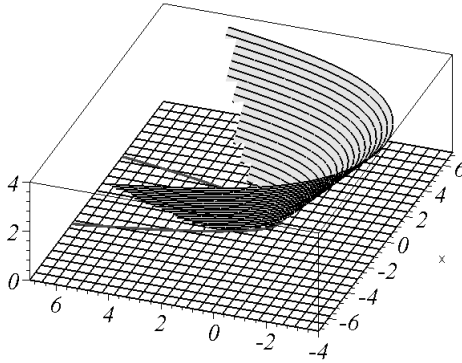


Рисунок 3.13 – Графік нормальної функції параболі  $y = x^2$ , записаної за допомогою радикалів

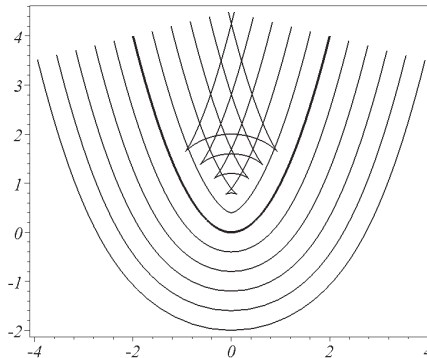


Рисунок 3.14 – Криві, які паралельні (еквідистантні) до параболі

---

**Приклад 3.6.** Для синусоїди  $x = t; y = \sin t$  маємо рівняння, яке одержано з виразу, що входить до чисельника похідної:

$$\cos t \sin t - y \cos t - x + t = 0. \quad (3.20)$$

Для  $t > 0$  маємо гілку нормального рівняння синусоїди:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(x - t_0)^2 + (y - \sin t_0)^2}. \quad (3.21)$$

У випадку  $t < 0$  для синусоїди  $x = -t; y = \sin t$  маємо рівняння, яке одержано з виразу, що входить до чисельника похідної:

$$\cos t \sin t - y \cos t + x + t = 0. \quad (3.22)$$

Для  $t < 0$  друга гілка нормального рівняння:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(x + t_0)^2 + (y - \sin t_0)^2}. \quad (3.23)$$

На рис. 3.15 зображено графік функції  $z = f_N(x, y)$  у просторі  $Oxyz$ . На рис. 3.16 наведено криві, паралельні до синусоїди. Вони одержані як проєкції на площину  $Oxy$  перерізів графіка нормальної функції  $z = f_N(x, y)$  площинами рівня  $z = \text{const}$ .

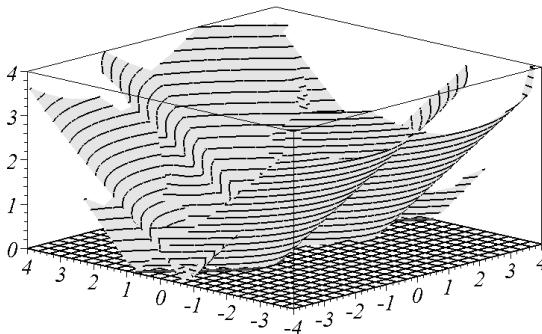


Рисунок 3.15 – Графік нормальної функції синусоїди

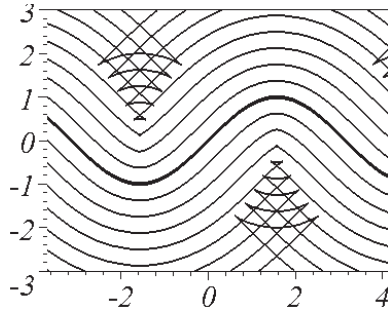


Рисунок 3.16 – Криві, які паралельні (еквідистантні)  
до синусоїди

**Приклад 3.7.** Для еліпса  $x = 3\cos t$ ;  $y = \sin t$  маємо рівняння, яке одержано з виразу, що входить до чисельника похідної:

$$8\cos t \sin t + y \cos t - 3x \sin t = 0. \quad (3.24)$$

Для  $t > 0$  маємо гілку нормального рівняння еліпса:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(x - 3\cos t_0)^2 + (y - \sin t_0)^2}. \quad (3.25)$$

У випадку  $t < 0$  для еліпса  $x = -3\cos t$ ;  $y = \sin t$  маємо рівняння, яке одержано з виразу, що входить до чисельника похідної:

$$8\cos t \sin t + y \cos t + 3x \sin t = 0. \quad (3.26)$$

Для  $t < 0$  маємо другу гілку нормального рівняння еліпса:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(x + 3\cos t_0)^2 + (y - \sin t_0)^2}. \quad (3.27)$$

На рис. 3.17 зображено графік функції  $z = f_N(x, y)$  у системі координат  $Oxyz$ . На рис. 3.18 наведено криві, паралельні еліпсу, одержані як проєкції на площину  $Oxy$  перерізів графіка нормальної функції  $z = f_N(x, y)$  площинами рівня  $z = \text{const}$ .

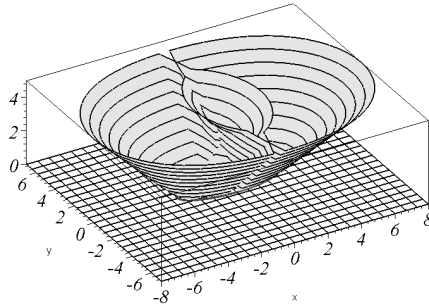


Рисунок 3.17 – Графік нормальної функції еліпса

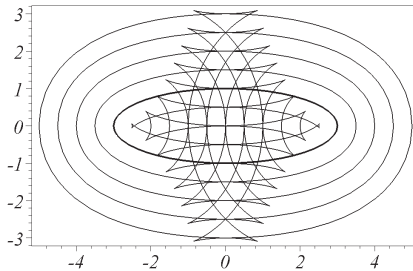


Рисунок 3.18 – Криві, які паралельні (еквідистантні) еліпсу

Неоднозначну (у напрямі осі  $Oz$ ) поверхню, яку зображено на рис. 3.17, описано з використанням комплексної функції у вигляді бінарної функції ***arctan***, яку слід обчислювати за формулою:

$$\arctan(y, x) = -i \ln \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

де  $i$  – уявна одиниця.

### 3.3. Алгоритм побудови нормальних функцій для поверхонь

У підрозділі 3.1 було визначено поняття нормального рівняння для  $n$ -вимірного геометричного об'єкта. У підрозділі 3.2 було



розглянуто метод опису та побудови паралельних множин з використанням графіка нормальної функції, коли об'єктом  $L$  була крива на площині, тобто коли  $n = 2$ . Цей підрозділ присвячено методу опису та побудови поверхонь ( $n = 3$ ), які задовольняють умову паралельності до даної поверхні у випадку, коли в прямокутній системі координат  $Oxyz$  початкову поверхню задано параметричними рівняннями.

Нехай у прямокутній системі координат  $Oxyz$  маємо початкову поверхню  $x = \phi(u, v)$ ;  $y = \psi(u, v)$ ;  $z = \eta(u, v)$ , де  $u, v$  – параметри. Оберемо у просторі довільну точку  $T(x, y, z)$  і розглянемо функцію:

$$f(x, y, z) = \sqrt{(x - \phi(u, v))^2 + (y - \psi(u, v))^2 + (z - \eta(u, v))^2}. \quad (3.28)$$

Значення функції (3.28) в точці  $T$  дорівнює відстані між  $T$  і точкою  $M$  на поверхні, яка відповідає конкретному значенню параметрів  $u$  і  $v$ . Визначимо значення параметрів  $u$  і  $v$ , які б "забезпечили" мінімальну відстань  $\inf(\rho(T, M))$ . Інакше кажучи, необхідно знати значення параметрів, при яких функція (3.28) досягає екстремуму.

Для цього спочатку обчислюємо частинні похідні:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = - \frac{(x - \phi) \frac{\partial \phi}{\partial u} + (y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial u} + (z - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial u}}{\sqrt{(x - \phi)^2 + (y - \psi)^2 + (z - \eta)^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = - \frac{(x - \phi) \frac{\partial \phi}{\partial v} + (y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial v} + (z - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial v}}{\sqrt{(x - \phi)^2 + (y - \psi)^2 + (z - \eta)^2}}$$

і розв'язуємо відносно  $u$  і  $v$  систему рівнянь, одержану з цих виразів:

$$(x - \phi) \frac{\partial \phi}{\partial u} + (y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial u} + (z - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0;$$

$$(x - \phi) \frac{\partial \phi}{\partial v} + (y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial v} + (z - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0. \quad (3.29)$$

Далі знайдені (дійсні) значення  $u_0$  і  $v_0$  підставляємо у вираз (3.28). Тоді одержана функція:

$$f_N = \sqrt{(x - \phi(u_0, v_0))^2 + (y - \psi(u_0, v_0))^2 + (z - \eta(u_0, v_0))^2} \quad (3.30)$$

матиме властивості нормальної функції. Тобто рівнянням:

$$f_N(x, y, z) = \text{const} \quad (3.31)$$

описано сім'ю поверхонь з елементами, паралельними (еквіфазними) до початкової поверхні  $x = \phi(u, v)$ ;  $y = \psi(u, v)$ ;  $z = \eta(u, v)$ . У чотиривимірному просторі  $Oxyz\xi$  рівнянням  $\xi = f_N(x, y, z)$  описується лінійчата гіперповерхня "однакового нахилу", тобто абстрактна поверхня, у якій всі твірні "утворюють кути  $45^\circ$ " з простором  $Oxyz$ . Звідси зрозуміло, що рівняння  $f_N(x, y, z) = \text{const}$  описує сім'ю поверхонь з елементами, паралельними до початкової поверхні.

Для визначення та візуалізації як початкових поверхонь, так і паралельних поверхонь, описаних параметричними рівняннями складається програма опису нормальної функції.

Паралельні поверхні, як правило, є *багатолистими графічними образами*, тому для їх опису доцільно застосовувати багатозначні функції в сенсі Коші (на відміну від однозначних функцій, за Діріхле – Лобачевським). Багатозначні ж функції в компактному вигляді описуються переважно за допомогою комплексних функцій.

**Приклад 3.8.** Для параболоїда обертання, заданого виразами  $x = u \cos v$ ;  $y = u \sin v$ ;  $z = u^2 / 2$  система рівнянь (3.29) має вигляд:

$$\begin{aligned} u^3 + 2(1 - z)u - 2(x \cos v + y \sin v) &= 0; \\ u(x \sin v - y \cos v) &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Нормальне рівняння параболоїда обертання:

$$f_N = \sqrt{(x - u_0 \cos v_0)^2 + (y - u_0 \sin v_0)^2 + \left(z - \frac{u_0^2}{2}\right)^2}, \quad (3.33)$$

де значення  $u_0$  і  $v_0$  визначаються розв'язанням рівняння (3.32).

На рис. 3.19 наведено дві поверхні, паралельні до параболоїда обертання, які одержано шляхом проєкціювання на простір  $Oxyz$  перерізів графіка функції  $\xi = f_N(x, y, z)$  гіперплощинами рівня  $\xi = 1, 2$ .

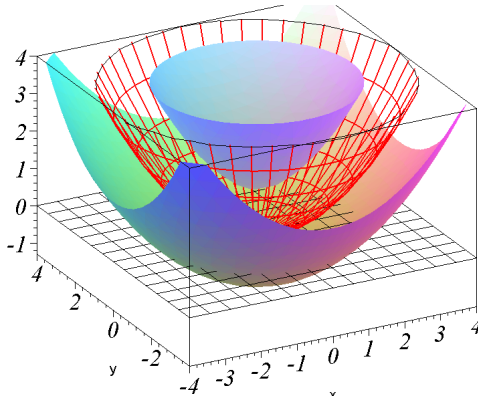


Рисунок 3.19 – Дві поверхні, паралельні до параболоїда  $\{x = u \cos v; y = u \sin v; z = u^2 / 2\}$  для гіперплощини  $\xi = 1, 2$

**Приклад 3.9.** Для гіперболічного параболоїда  $x = u \operatorname{ch} v; y = u \operatorname{sh} v; z = u^2 / 2$  система рівнянь (3.29) має вигляд:

$$\begin{aligned} u^3 + 2(1 - z)u - 2(x \operatorname{ch} v + y \operatorname{sh} v) + 4u \operatorname{ch}^2 v &= 0; \\ u(x \operatorname{sh} v + y \operatorname{ch} v - 2u \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v) &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Нормальне рівняння гіперболічного параболоїда:

$$f_N = \sqrt{(x - 2 \sin u_0 \cos v_0)^2 + (y - 2 \sin u_0 \sin v_0)^2 + (z - \cos u_0)^2}, \quad (3.35)$$

де значення  $u_0$  і  $v_0$  визначаються як розв'язок рівняння (3.34).

На рис. 3.20 наведено дві поверхні, паралельні до гіперболічного параболоїда. Вони одержані (сумісно) шляхом проєкціювання на простір  $Oxyz$  перерізів графіка нормальної функції  $\xi = f_N(x, y, z)$  гіперплощинами рівня  $\xi = \text{const}$ .

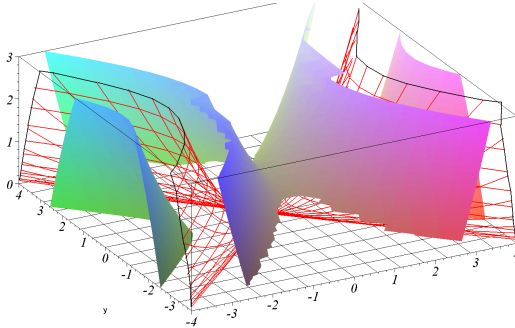


Рисунок 3.20 – Дві поверхні, паралельні до гіперболічного параболоїда  $\{x = u \operatorname{ch} v; y = u \operatorname{sh} v; z = u^2 / 2\}$  для гіперплощини  $\xi = 0,5$

**Приклад 3.10.** Для еліпсоїда, заданого виразами  $x = 2 \sin u \cos v$ ,  $y = 2 \sin u \sin v$ ,  $z = \cos u$  система рівнянь (3.29) має вигляд:

$$\begin{aligned} u^3 + 2(1 - z)u - 2(x \cos v + y \sin v) &= 0; \\ u(x \sin v - y \cos v) &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Нормальне рівняння еліпсоїда:

$$f_N = \sqrt{(x - 2 \sin u_0 \cos v_0)^2 + (y - 2 \sin u_0 \sin v_0)^2 + (z - \cos u_0)^2}, \quad (3.37)$$

де значення  $u_0$  і  $v_0$  є розв'язком рівняння (3.36).

На рис. 3.21 наведено дві поверхні, які будуть паралельними (еквіфазними) до розглянутого еліпсоїда. Вони одержані шляхом проєкціювання на простір  $Oxuz$  перерізів графіка нормальної функції  $\xi = f_N(x, y, z)$  гіперплощинами рівня  $\xi = \text{const}$ .

**Приклад 3.11.** Для конуса, заданого виразами  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u$  система рівнянь (3.29) має вигляд:

$$\begin{aligned} 2u - z - x \cos v - y \sin v &= 0; \\ u(x \sin v - y \cos v) &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Нормальне рівняння конічної поверхні:

$$f_N = \sqrt{(x - u_0 \cos v_0)^2 + (y - u_0 \sin v_0)^2 + (z - u_0)^2}, \quad (3.39)$$

де значення  $u_0$  і  $v_0$  є розв'язком (3.38).

На рис. 3.22 наведено дві поверхні, паралельні до конічної поверхні, які одержано шляхом проєкціювання на простір  $Oxyz$  перерізів графіка функції  $\xi = f_N(x, y, z)$  гіперплощинами рівня  $\xi = 2$ . З цього рисунку видно, що при  $z < 0$  на формування паралельної поверхні впливає "нижня" пола конічної поверхні.

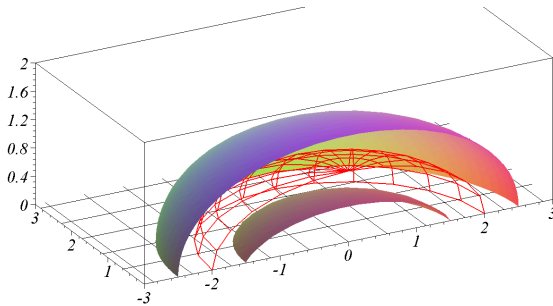


Рисунок 3.21 – Дві поверхні, паралельні до еліпсоїда  $\{x = 2\sin u \cos v; y = 2\sin u \sin v; z = \cos u\}$  для гіперплощини  $\xi = 0,5$

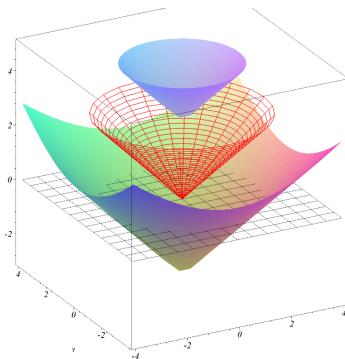


Рисунок 3.22 – Дві поверхні, паралельні до конуса  $\{x = u \cos v; y = u \sin v; z = u\}$  для гіперплощини  $\xi = 2$

### 3.4. Можливості застосування нормальних функцій для визначення сімей паралельних ліній та поверхонь

У задачах, де потрібно описувати криві та поверхні за допомогою рівнянь, на вибір одного з множини можливих розв'язків впливає не тільки конкретний зміст задачі, але й додаткові умови та висновки, що формуються на етапах розв'язання.

У підрозділі 3.1 розглянуто опис кресленника нормальною функцією. Термін "нормальне рівняння" є аналогічним терміну "нормальне рівняння прямої", якому відповідає форма рівняння прямої:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (3.40)$$

де  $p$  – довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат до прямої;  $\alpha$  – кут між віссю абсцис і цим перпендикуляром.

Відстань  $p$  від довільної точки  $M(x_1, y_1)$  координатної площини до прямої визначається за формулою:

$$p = |x \cos \alpha + y \sin \alpha - p|. \quad (3.41)$$

Отже, за визначенням, *нормальним рівнянням прямої* є вираз:

$$|x \cos \alpha + y \sin \alpha - p| = 0, \quad (3.42)$$

який з точністю до знака збігається з рівнянням (3.40).

У підрозділі 3.1 дано рівняння точки, прямої і прямокутника. Нормальними рівняннями можна описати переважно лінії, які складаються з відрізків і дуг. Складання нормального рівняння довільної лінії натикається на труднощі, які ілюструє приклад складання нормального рівняння еліпса.

Нехай на площині в декартовій системі координат  $Oxy$  задано еліпс  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$  і точку  $M_1(x_1, y_2)$  на ньому, причому як точку  $M_1(x_1, y_2)$  обрано найближчу точку до  $M(x, y)$ , яку задано на площині (рис. 3.23).

---

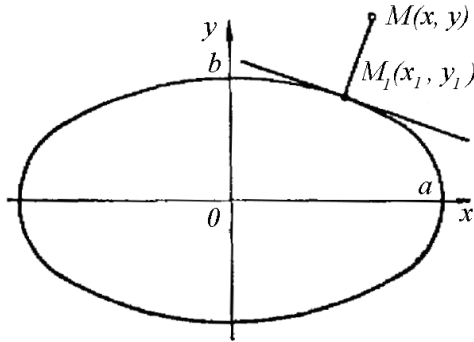


Рисунок 3.23 – Дотична та нормаль еліпса

Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до еліпса в точці  $M_1(x_1, y_1)$ , визначається за формулою:

$$k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}. \quad (3.43)$$

Звідси одержується рівняння нормалі  $M_1M$ :

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1). \quad (3.44)$$

Координати точки  $M_1$  задовольняють також рівнянню еліпса:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (3.45)$$

З рівнянь (3.44) і (3.45) знаходяться:

$$x - x_1 = \frac{y a^2 - \lambda x b^2}{\lambda(a^2 - b^2)}; \quad (3.46)$$

$$y - y_1 = \frac{ya^2 - \lambda xb^2}{a^2 - b^2}, \quad (3.47)$$

де  $\lambda = \lambda(x, y)$  є розв'язком рівняння:

$$(\lambda x - y)^2 (a^2 + \lambda^2 b^2) - \lambda^2 (a^2 - b^2)^2 = 0. \quad (3.48)$$

Тоді відстань від точки  $M(x, y)$  до еліпса визначатиметься формулою:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \left| \frac{ya^2 - \lambda xb^2}{a^2 - b^2} \right| \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}. \quad (3.49)$$

Отже, нормальне рівняння еліпса має вигляд:

$$\left| \frac{ya^2 - \lambda xb^2}{a^2 - b^2} \right| \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} = 0. \quad (3.50)$$

Функція  $\lambda = \lambda(x, y)$ , що входить у цей вираз, є тим дійсним коренем рівняння (3.48), якому відповідає найменше значення нормальної функції  $\lambda = \lambda(x, y)$  (адже з геометричних міркувань виходить, що рівняння (3.48) завжди має два дійсні корені).

Таким чином, задача побудови нормального рівняння еліпса пов'язана з розв'язанням рівняння четвертого степеня (3.48). Для таких кривих, як, наприклад, графіки показової, логарифмічної та інших функцій, побудова нормальних рівнянь пов'язана з розв'язанням трансцендентних рівнянь, які, взагалі кажучи, точно не розв'язуються. У цьому полягає основна складність процесу опису нормальних рівнянь для довільних кривих.

Однак задача побудови наближеного нормального рівняння практично може бути розв'язаною для будь-якого кресленика, що із заданою точністю апроксимується кінцевим числом дуг і відрізків.

На рис. 3.24 і 3.25 наведено приклади виконання програми опису нормальним рівнянням багатокутника з вершинами  $(-2, 3)$ ;  $(-4, 0)$ ;  $(-2, -3)$ ;  $(3, -4)$ ;  $(3, -1)$ ;  $(5, 3)$ ;  $(1, 1)$ .



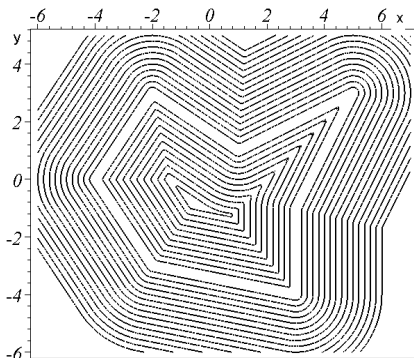


Рисунок 3.24 – Лінії рівня графіка нормальної функції багатокутника

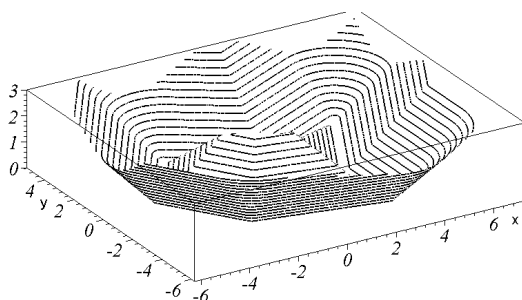


Рисунок 3.25 – Графік нормальної функції багатокутника

Алгоритм опису нормальної функції дуги кола, що проходить через точки з координатами  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  і  $(x_3, y_3)$ . Нумерацію точок обрано в напрямі, протилежному напрямку руху стрілки годинника. Рівняння такого кола має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.51)$$

Переписавши це рівняння у вигляді:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \quad (3.52)$$

де  $A = (-y_2^2 y_3 - x_1^2 y_2 - y_3^2 y_1 + y_1^2 y_3 + x_2^2 y_1 - x_3^2 y_1 - x_2^2 y_3 + y_2^2 y_1 + x_1^2 y_3 + y_3^2 y_2 + x_3^2 y_2 - y_1^2 y_2) / (x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2),$

$$B = (x_1^2 x_2 - y_1^2 x_3 - y_3^2 x_2 + y_2^2 x_3 - x_2^2 x_1 - x_1^2 x_3 - y_2^2 x_1 + y_1^2 x_2 + y_3^2 x_1 - x_3^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) / (x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2),$$

$$C = (-y_1^2 x_2 y_3 - x_2^2 x_3 y_1 + x_2^2 x_1 y_3 + y_3^2 x_2 y_1 - y_3^2 x_1 y_2 - x_3^2 x_1 y_2 - y_2^2 x_3 y_1 + y_1^2 x_3 y_2 + x_3^2 x_2 y_1 + y_2^2 x_1 y_3 + x_1^2 x_3 y_2 - x_1^2 x_2 y_3) / (x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2),$$

одержуємо формули для обчислення радіуса кола і координат його центра:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C};$$

$$x_0 = -\frac{A}{2};$$

$$y_0 = -\frac{B}{2}. \quad (3.53)$$

На рис. 3.26 позначено опорні області  $A_i$ , які необхідно обрати для опису нормальної функції дуги кола. Кожну з опорних областей описано за допомогою таких формул, де через  $r$  позначено радіуси кіл  $A_1$  або  $A_2$ :

$$f_1 = r - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2};$$

$$f_2 = r - \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2};$$

$$\begin{aligned}
 f_3 &= R+r-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}; \\
 f_4 &= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-R+r; \\
 f_5 &= \frac{(x-x_1)(y_0-y_1)-(y-y_1)(x_0-x_1)}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}}; \\
 f_6 &= \frac{(x-x_0)(y_3-y_0)-(y-y_0)(x_3-x_0)}{\sqrt{(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

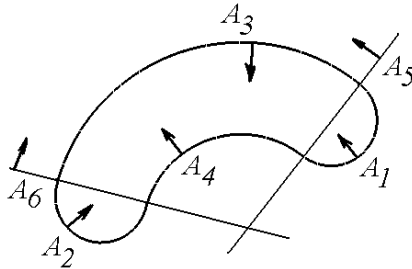


Рисунок 3.26 – Опорні області для опису нормальної функції дуги кола

Логічна формула опису має вигляд:

$$F = f_1 \vee f_2 \vee (f_3 \wedge f_4 \wedge f_5 \wedge f_6).
 \tag{3.55}$$

Як приклад, взято дугу, що проходить через точки з координатами (4; 6), (-3; 8) і (-11; 1).

Для графічної інтерпретації опису нормального рівняння дуги кола є два способи.

За першим способом слід задати "товщину дуги" шляхом вибору значення  $r$ . Різні ракурси зображення відповідного графіка нормальної функції дуги наведено на рис. 3.27.

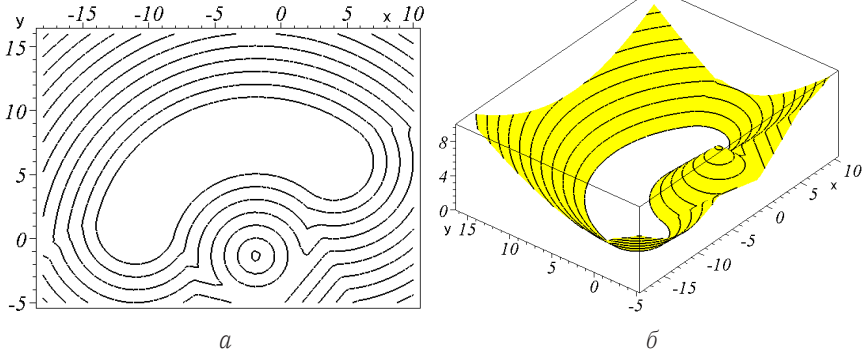


Рисунок 3.27 – Графік нормальної функції дуги кола за першим способом:  $a$  – лінії рівня;  $b$  – аксонометричне зображення графіка

Результат є кращим за умови застосування *другого* способу, коли змінними параметрами обрано  $x$ ,  $y$  та  $r$ .

Тоді зображення графіка нормальної функції дуги є таким, яке наведено на рис. 3.28.

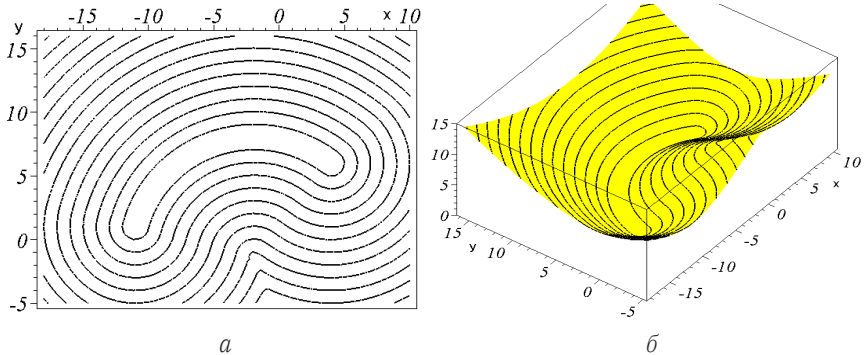


Рисунок 3.28 – Графік нормальної функції дуги кола за другим способом:  $a$  – лінії рівня;  $b$  – аксонометричне зображення графіка

Наведена в підрозділах 3.2 і 3.3 схема побудови нормальних рівнянь на практиці натикається на аналітичні труднощі опису, які виникають з причини розділення площини вихідною (початковою)

кривою (аналогічно – розділення тривимірного простору вихідною (початковою) поверхнею) на дві області, для яких поняття відстані трактується неоднозначно. Це пояснює приклад вихідної плоскої кривої – еліпса.

**Приклад 3.12.** Для еліпса  $x = a \cos t; y = b \sin t$  маємо рівняння, яке одержано з виразу, що входить до чисельника похідної (3.11):

$$(a^2 - b^2) \cos t \sin t + by \cos t - ax \sin t = 0. \quad (3.56)$$

Знаходимо дійсний корінь рівняння (3.56). (У радикалах цей вираз є надто громіздким.)

Для  $x > 0$  маємо гілку нормального рівняння еліпса:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(x - a \cos t_0)^2 + (y - b \sin t_0)^2}. \quad (3.57)$$

На рис. 3.29 і 3.31 для випадку  $x > 0$  зображено сім'ї кривих, паралельних до правої частини еліпса залежно від його розмірів уздовж координатних осей.

На рис. 3.30 і 3.32 зображено графіки відповідних нормальних функцій  $z = f_N(x, y)$ . Криві, паралельні до еліпса, трактуються як проєкції на площину  $Oxy$  перерізів графіка нормальної функції площинами рівня  $z = \text{const}$ .

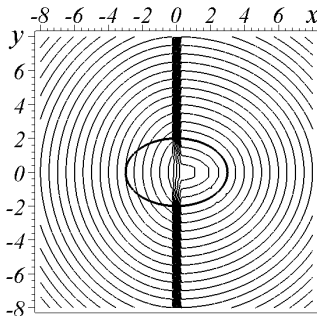


Рисунок 3.29 – Сім'ї кривих, паралельних до правої частини еліпса при  $a = 3; b = 2$

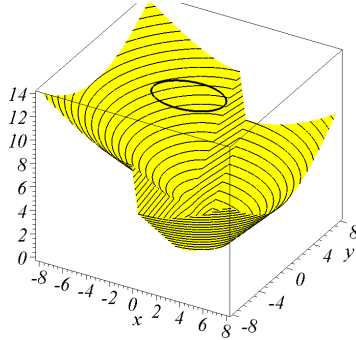


Рисунок 3.30 – Графік нормальної функції еліпса при  $a=3$ ;  $b=2$

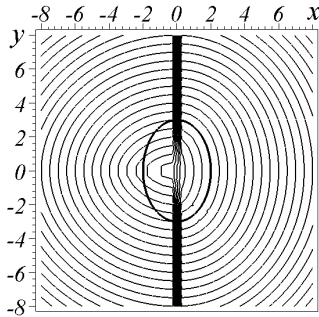


Рисунок 3.31 – Сім'ї кривих, паралельних до правої частини еліпса при  $a=2$ ;  $b=3$

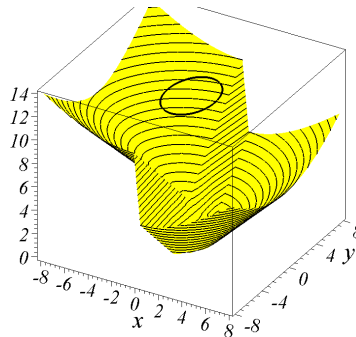


Рисунок 3.32 – Графіки нормальної функції еліпса при  $a=2$ ;  $b=3$

Аналогічними є зображення й у випадку  $x < 0$ .

Для значень  $x$  та  $y$  узі всієї осі для еліпса  $x = a \cos t$ ;  $y = b \sin t$  маємо рівняння, яке одержано з виразу для чисельника похідної (3.11):

$$(a^2 - b^2) \cos t \sin t + b|y| \cos t - a|x| \sin t = 0. \quad (3.58)$$

Знаходимо дійсний корінь  $t_0$  рівняння (3.58). Нормальне рівняння еліпса має вигляд:

$$f_N(x, y) = \sqrt{(|x| - a \cos t_0)^2 + (|y| - b \sin t_0)^2}. \quad (3.59)$$

На рис. 3.33 і 3.34 зображено, відповідно, сім'ї кривих, паралельних до еліпса і графік нормальної функції для  $a = 3$ ;  $b = 2$ .

Таким чином, опис кривих, паралельних початковій кривій на площині, яка є симетричною відносно своїх осей у системі координат  $Oxuz$ , здійснюється за допомогою рівняння (3.58), де до змінних застосовано операцію "взяття модуля".

Перевіркою цього є приклад побудови кривих, паралельних до астройди  $x = 3 \cos^3 t$ ;  $y = 3 \sin^3 t$ . На рис. 3.35 і 3.36 наведено результати роботи програми.

Для порівняння на рис. 3.37 наведено зображення паралельних кривих, які побудовано за допомогою формули "без модулів".

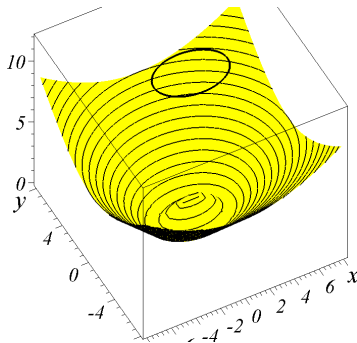


Рисунок 3.33 – Графік нормальної функції еліпса при  $a = 3$ ;  $b = 2$

---

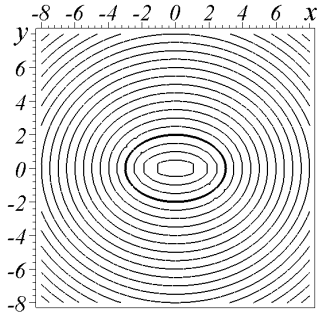


Рисунок 3.34 – Сім'ї кривих, паралельних до еліпса при  $a=3$ ;  $b=2$

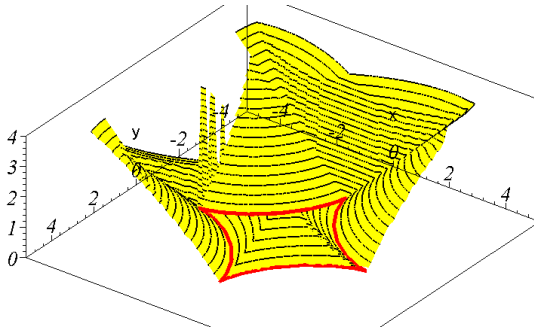


Рисунок 3.35 – Графік нормальної функції астроїди (вид знизу)

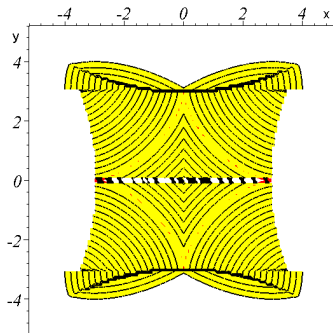


Рисунок 3.36 – Сім'я кривих, паралельних до астроїди



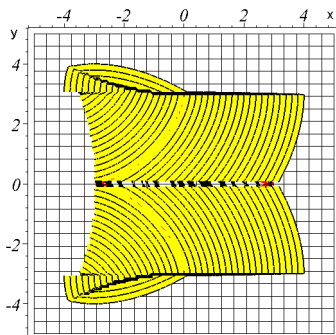


Рисунок 3.37 – Сім'я кривих, паралельних до "половини" астроїди

### Контрольні запитання та вправи

1. Пояснити графічне подання нормальної функції.
2. Кресленик і графік нормальної функції.
3. Пояснити сім'ю паралельних ліній з використанням поняття графіку нормальної функції.
4. Навести означення та приклади подання функції геометричного об'єкта у нормальному вигляді.
5. Сформулювати теорему В. Л. Рвачова.
6. Яким будуть графіки нормальних функцій параболи, синусоїди, еліпса?
7. Пояснити побудову паралельних поверхонь з використанням поняття нормальної функції для параболоїда обертання, заданого параметрично.
8. Назвати умови побудови наближеного нормального рівняння.
9. Назвати два способи графічної інтерпретації опису нормального рівняння дуги кола.

## РОЗДІЛ 4. КВАЗИПАРАЛЕЛЬНІ КРИВІ ТА ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

У результаті відображення множини точок (наприклад, ортогональної сітки) однієї комплексної площини на іншу за допомогою функцій комплексної змінної одержується конформна сітка, яка є сім'єю квазіпаралельних ліній. Метод конформних відображень має численні впровадження в механіці, фізиці та техніці, в першу чергу, для розрахунку плоских гармонійних векторних полів у гідро- й аеродинаміці, теорії фільтрації, теорії електричних і магнітних полів, теорії теплопередачі. Конформні відображення є ефективним математичним апаратом для розв'язання широкого кола задач математичної фізики і прикладної математики.

### **4.1. Використання конформних відображень для генерації розрахункових регулярних сіток**

У дослідженнях фізичних полів важливими є питання визначення параметрів цих полів за допомогою розрахункових регулярних сіток. Процес побудови розрахункових сіток належить до ключових моментів проведення числового експерименту. Раціональним вибором сітки можна значно спростити розв'язання модельних рівнянь, які, як правило, утворюють систему диференціальних рівнянь у частинних похідних. У задачах обчислювальної гідроаеродинаміки найбільш поширені *регулярні сітки* (чотирибічні елементи на поверхні та шестигранні в просторі). Регулярність полягає у тому, що сітка виступає як упорядкована за визначеними правилами структура з явно вираженими сітковими напрямками – "осями" криволінійної системи координат. У перетвореному (обчислювальному) просторі елементами сітки є топологічні прямокутники (двовимірний випадок) або паралелепіеди (тривимірний випадок). Крім того, для дискретизації модельних рівнянь використовують методи кінцевих різниць.

Для практики найбільш цікавими є *ортогональні* і *конформні* сітки.

У випадку *ортогональної* сітки при дискретизації модельних рівнянь обнуляються деякі параметри перетворення, що є компонентами метричного тензора перетворення (матриці Якобі) і які знаходяться не на головній діагоналі даного тензора. Наслідком цього буде зменшення похибок, адже в такому разі немає необхідності апроксимувати апіорі нульові компоненти тензора перетворення координат, і, отже, підвищується точність розв'язку.

Використання конформних перетворень дозволяє зберегти таку ж структуру модельних рівнянь, записаних в обчислювальній системі координат, як і в декартовому просторі. На аналітичному рівні це проявляється в тому, що параметри перетворення дорівнюють або одиниці, або нулю. Тому доцільним є використання конформного відображення для генерації розрахункових сіток фізичних полів.

З *позицій прикладної геометрії конформні сітки* розглядаються як графічне подання узагальнених паралельних множин у задачах геометричного моделювання розподілу параметрів фізичних полів.

Методи для побудови регулярних розрахункових сіток:

- алгебраїчні,
- методи на основі розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних,
- методи з використанням теорії функцій комплексної змінної.

*Алгебраїчний тип сіток* будується на основі розв'язання систем алгебраїчних рівнянь. Основна ідея алгебраїчних методів побудови сіток полягає у використанні інтерполяції граничних даних для визначення внутрішніх вузлів сітки. Контроль за розміщенням вузлів сітки здійснюється за допомогою функцій розтягання. Широко відомі такі *алгебраїчні методи* побудови сіток для дво- і тривимірних задач: метод двох границь; метод багатьох поверхонь; транс-фінітна інтерполяція.

У випадку *диференціальних методів* побудова сіток здійснюється на основі *розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних*. Використання даного підходу не завжди приводить до побудови ортогональних або конформних сіток.

*Диференціальні рівняння у частинних похідних розділяють на класи*: гіперболічні, параболічні й еліптичні. Відповідно, виділяють

диференціальні методи побудови сіток, основані на використанні перелічених типів рівнянь. Під час побудови сіток враховують властивості розв'язків гіперболічних, параболічних або еліптичних рівнянь.

*У випадку гіперболічних рівнянь:*

– гіперболічні рівняння позбавлені механізму дифузійного згладжування, тому розриви в початкових даних зберігаються у всій розрахунковій області, що неприйнятно під час побудови сітки;

– розв'язок гіперболічних рівнянь може виявитися хитливим, незважаючи на введення "штучної в'язкості";

– під час побудови сітки не можуть бути використані всі граничні умови фізичної області, а це має істотне значення для широкого класу задач;

– важливою перевагою гіперболічних рівнянь є те, що вони розв'язуються ефективними маршовими методами і тому вимагають істотно менших витрат часу порівняно з еліптичними рівняннями.

*У випадку параболічних рівнянь:*

– сітка будується маршовим методом, що забезпечує високу обчислювальну ефективність;

– параболічні рівняння мають багато властивостей еліптичних рівнянь, зокрема, механізм дифузійного згладжування, що забезпечує відсутність зламів і розривів у розв'язку;

– недоліком є неможливість використання всіх граничних умов фізичної області, оскільки для параболічних рівнянь у маршовому напрямі умови не висуваються.

*У випадку еліптичних рівнянь:*

– можливість одержання "гладкого" розв'язку;

– врахування граничних умов на всіх границях фізичної області;

– взаємо однозначність відображень фізичної й обчислювальної областей;

– гнучкий механізм контролю за розміщенням внутрішніх вузлів сітки;

– недоліком є великий час розв'язання порівняно з гіперболічними або параболічними рівняннями, бо еліптичні рівняння розв'язуються ітераційними методами.

Найбільш поширеними є методи побудови сіток на основі розв'язання еліптичних рівнянь та алгебраїчні методи – трансфінитна

інтерполяція і метод багатьох поверхонь. Однак жоден з наведених вище підходів не є універсальним щодо всього спектра задач обчислювальної гідроаеродинаміки. У загальному випадку може застосовуватися будь-який метод, що дозволяє одержати задовільні результати під час моделювання. З точки зору обчислювальної ефективності переважним є використання алгебраїчних методів побудови сіток, особливо у тривимірному випадку. Дані методи дозволяють забезпечити умову локальної ортогональності сітки у заданих областях. Відповідно, перебудова сітки алгебраїчними методами здійснюється швидше, ніж в інших випадках.

Для перетворення комплексних змінних вдаються до побудови *двовимірних конформних сіток*.

Для цього застосовують *два підходи*:

- для добре обтічних тіл використовують послідовність відображень тіла, що зводять поверхню до кола одиничного радіуса;
- для тіл довільної форми прийнятним є однокрокове перетворення Крістоффеля – Шварца.

Метод комплексних змінних дозволяє одержати аналітичні функції перетворення.

До загальних недоліків побудови сіток конформними відображеннями з використанням комплексних змінних належить обмеження на розмірність сіток, адже вони є переважно двовимірними. Існують підходи до побудови просторових сіток, однак у тривимірному випадку цілком конформні сітки можуть бути отримані в окремих випадках. Недоліком тут є нетривіальність вибору послідовності конформних відображень для тіл складної конфігурації.

*Прямі перетворення границь області* від фізичної до обчислювальної площини досить ефективні, проте зворотні перетворення такими не є. *Суть обернених перетворень* полягає у встановленні відповідності між сітковими вузлами обчислювальної і фізичної областей. Тому у загальному випадку, визначення внутрішніх вузлів сітки здійснюється шляхом числового розв'язання еліптичної системи з граничними умовами, визначеними при прямому перетворенні, що також є певним недоліком методу.

Побудова цілком конформних або ортогональних сіток можлива тільки у двовимірному випадку, а для трьох вимірів виконання зазначених умов дуже обмежена. Конформні сітки будують,

як правило, на основі перетворень комплексних змінних і розв'язання еліптичних рівнянь у частинних похідних.

Крім того, *до недоліків конформних сіток* віднесено те, що згущення вузлів сітки всередині фізичної області не завжди відбувається необхідним чином для розв'язання задач обчислювальної гідроаеродинаміки; сітки є дуже чутливими до зміни зовнішніх границь (невелика зміна границі веде до необхідності перебудови сітки); подвійне обмеження на ортогональність і масштабний фактор вносять додаткові труднощі у генерацію сітки за допомогою диференціальних рівнянь.

*Цілоком ортогональні сітки можна побудувати* методами конформних відображень з подальшим розтяганням вузлів (при цьому конформність порушується, але вимога ортогональності повинна бути дотримана) або диференціальними методами. В областях зі складною геометрією цілоком ортогональні сітки можуть бути дуже деформованими у фізичній області, і тому можлива поява додаткової похибки при розв'язанні задач обчислювальної гідроаеродинаміки. У багатьох задачах можна використовувати сітки, наближені до ортогональних, замість строго ортогональних. Побудова подібних сіток здійснюється з меншими витратами обчислювальних ресурсів.

*Взаємооднозначність відображень* фізичної й обчислювальної областей забезпечують методи послідовних конформних відображень і диференціальний метод на основі розв'язання еліптичних рівнянь у частинних похідних. В інших випадках взаємооднозначність відображень не гарантується, тому потрібен інтерактивний процес генерації сітки з використанням графічних засобів ЕОМ. При моделюванні як зовнішніх, так і внутрішніх течій може застосовуватися будь-який метод побудови сіток.

Під час *побудови регулярних сіток у фізичних областях зі складною геометрією* застосовують перетворення координат загального вигляду, зв'язаних з поверхнею тіла. Основна мета даного перетворення полягає у побудові *рівномірної розрахункової сітки в перетвореному (обчислювальному) просторі*, крім того, фізичні границі збігаються з координатними лініями в обчислювальній області. Уведення криволінійної системи координат загального вигляду дозволяє ефективніше проводити розрахунки в обчислювальній області,

оскільки вона є прямокутною в узагальнених координатах. Разом з тим, у рівняннях, записаних у криволінійних координатах, з'являються додаткові члени – параметри перетворення, що визначають відображення фізичної області на простір узагальнених координат. Параметри перетворення мають форму похідних, для яких, у свою чергу, необхідно проводити дискретизацію, що є додатковим джерелом похибок. За допомогою вибору сітки перетворені рівняння можна значно спростити.

Програми, які використовують регулярні конформні сітки, є значно простішими, тому що вони не вимагають збереження і переробки інформації про сусідні осередки, ребра, грані (орієнтація, довжини та ін.), що необхідно для розрахунку на неструктурованих сітках. Крім того, регулярні сітки дозволяють застосовувати методи розщеплення за напрямками у багатовимірних задачах.

Для регулярних конформних сіток характерним є зниження точності схеми на границях з тілом складної геометрії, оскільки задача побудови таких сіток у загальному випадку не є тривіальною. Для схем, де використовують регулярні сітки, існує проблема малих областей на границях з тілом, що накладає обмеження на крок інтегрування і потребує для розв'язання стійкої різничевої схеми.

## **4.2. Метод конформних відображень в задачах інтерпретації паралельних множин**

Застосування методу конформних відображень дозволяє генерувати сітку квазіпаралельних ліній.

Ефективним підходом до побудови квазіпаралельних ліній, які підпорядковані закону конформних відображень, є розв'язання задач математичної фізики, що зводяться до рівнянь еліптичного типу. До цього класу задач належать задачі електростатики (та аналогічні за математичною постановкою задачі фільтрації), в яких потенціал електростатичного поля  $\phi(x, y, z)$  задовольняє рівнянню Пуассона  $\Delta\phi = \rho(x, y, z) / \epsilon_0$ , де  $\rho(x, y, z)$  – густина електричного заряду в даній точці простору. За відсутністю об'ємно розподілених електричних зарядів одержуємо рівняння Лапласа  $\Delta\phi = 0$ . Функція, що задовольняє цьому рівнянню, називається *гармонічною*.

Одна з основних задач електростатики полягає у тому, щоб знайти розподіл потенціалу ( $i$ , відповідно, електричного поля) у просторі, якщо відомим є потенціал на поверхні провідника, який створює дане поле. Для цього покажемо, як розв'язати задачу за допомогою методів теорії функцій комплексної змінної.

Комплексна функція  $w = f(z) = \psi(x, y) + i\phi(x, y)$  називається аналітичною в області  $G$ , якщо всюди в цій області існує її похідна. Необхідними і достатніми умовами аналітичності функції є умови Коші – Рімана:  $\partial\psi/\partial x = \partial\phi/\partial y$ ;  $\partial\phi/\partial x = -\partial\psi/\partial y$ .

Якщо функція є аналітичною в області  $G$ , то вона в цій області є також і гармонічною. Це можна побачити, продиференціювавши перше з рівнянь Коші – Рімана за  $y$ , а друге – за  $x$  і порівнявши неперервні змішані похідні.

#### **4.2.1. Метод конформних відображень за допомогою інтеграла Крістоффеля – Шварца**

Існує метод, де за допомогою аналітичної функції  $f(z)$  відображується область  $G_1$  площини  $z$  на область  $G_2$  площини  $w$ . Таке відображення зберігає кути між пересічними прямими і називається *конформним*. Важливо, що конформне відображення зберігає гармонічність функції. Тому, якщо просту область (наприклад, верхню півплощину), всередині якої відомим є розподіл потенціалу (електричного поля), перевести за допомогою конформного відображення у більш складну область, то можна розрахувати розподіл потенціалу (електричного поля) усередині цієї більш складної області. Для розв'язання задачі необхідно знати, як визначити аналітичну функцію, що переводить верхню півплощину в конкретну область  $G_2$  площини  $w$ . Така задача розв'язується за допомогою інтеграла Крістоффеля – Шварца.

Розглянемо *конформне відображення за допомогою інтеграла Крістоффеля – Шварца*.

*Багатокутником* будемо називати однозв'язну область повної комплексної площини  $w = u + iv$ , яка обмежена ламаною лінією.

Розв'язання *прямої* задачі Крістоффеля – Шварца полягає у побудові результату конформного відображення за умови, що відомою

---



є функція, яка відображує комплексну півплощину  $\text{Im } z \geq 0$  на комплексну площину  $w = u + iv$ , і два набори з  $n$  чисел.

Розв'язання оберненої задачі Крістоффеля – Шварца полягає у визначенні функції  $w(z)$ , що конформно відображує комплексну півплощину  $\text{Im } z \geq 0$  на заданий багатокутник комплексної площини  $w = u + iv$ .

**Твердження 4.1.** Нехай задано два набори з  $n$  чисел: числа  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), які розташовані в порядку зростання  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , та числа  $\alpha_k$ , які задовольняють умови  $0 < \alpha_k \leq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$ .

Тоді функція:

$$w(z) = \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz \quad (4.1)$$

відобразить дійсну вісь  $z = x$  у замкнуту ламану, що обмежує  $n$ -кутник з вершинами у деяких точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  і кутами  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$  при них. Зазначимо, що з урахуванням умови  $0 < a_k \leq 1$  цей багатокутник буде опуклим (рис. 4.1). Крім того, згідно з принципом відповідності границь, функція (4.1) відобразить конформно півплощину  $\text{Im } z \geq 0$  на внутрішню область цього  $n$ -кутника.

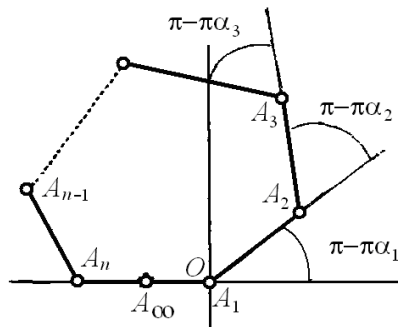


Рисунок 4.1 – Замкнута ламана, що обмежує  $n$ -кутник

Це твердження поширюється і на випадок, коли  $-2 < a_k \leq 2$ , тобто на неопуклий багатокутник з невласними вершинами.

**Твердження 4.2.** Нехай числа  $a_k$  задовольняють умови  $-2 < a_k \leq 2$ ,  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$ , тоді функція:

$$w = C \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz + C_1 \quad (4.2)$$

реалізує конформне відображення півплощини  $\text{Im } z \geq 0$  на внутрішню частину довільного однозв'язного й однолистоного  $n$ -кутника площини  $w$  з кутами  $a_k \pi$  при вершинах  $A_k$ .

У (4.2) через  $a_k$  позначено координати точок на дійсній осі площини  $z$ , які відповідають вершинам  $A_k$  багатокутника. Константи  $C \neq 0$  і  $C_1$  є комплексними числами.

Вираз (4.2) називають *формулою, або інтегралом, Крістоффеля – Шварца*. У цю формулу входять два комплексні параметри  $C$  і  $C_1$  та  $n$  дійсних параметрів.

Теорема Крістоффеля – Шварца встановлює лише існування набору параметрів, при яких функція (4.2) відображує півплощину на заданий багатокутник, але не надає даних про те, як це зробити.

На практиці *більш зручно обирати точки  $a_k$  не на дійсній осі площини  $z$ , а на колі одиничного радіуса*. Для цього необхідно одержати функцію, яка відображує верхню півплощину  $\text{Im } z \geq 0$  на одиничний круг  $|t| \leq 1$ . Застосуємо дрібно-лінійне перетворення у вигляді:

$$z = i \frac{1+t}{1-t}. \quad (4.3)$$

В цьому перетворенні точки дійсної осі  $z = a_k$  відображаються у точки кола одиничного радіуса  $t = b_k = \frac{a_k - i}{a_k + i}$ ,  $|b_k| = 1$ . Тоді різницю  $z - a_k$  можна записати у вигляді  $z - a_k = \frac{a_k - i}{t - 1} (1 - t/b_k)$ , в результаті чого підінтегральний вираз (4.2) набуде вигляду:

$$\prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz = 2i \prod_{k=1}^n (a_k - i)^{\alpha_k - 1} \prod_{k=1}^n \left( \frac{1 - t/b_k}{t - 1} \right)^{\alpha_k - 1} \frac{dt}{(t - 1)^2}. \quad (4.4)$$

Тобто функція, яка відображує круг  $|t| < 1$  на багатокутник, матиме вигляд:

$$w = 2i \prod_{k=1}^n (a_k - i)^{\alpha_k - 1} C \int_0^z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t}{b_k}\right)^{\alpha_k - 1} dt + C_1, \quad (4.5)$$

де числа  $b_k$  означають точки одиничного кола (прообрази вершин багатокутника).

Формулі (4.5) надається більш простий вигляд без множника  $2i \prod_{k=1}^n (a_k - i)^{\alpha_k - 1}$ :

$$w = C \int_0^z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t}{b_k}\right)^{\alpha_k - 1} dt + C_1.$$

**Приклад 4.1.** На рис. 4.2 наведено зображення для  $n=3$ ;  $a_1=-3,73$ ;  $a_2=-0,27$ ;  $a_3=1$ ;  $\alpha_1=0,3$ ;  $\alpha_2=0,4$ ;  $\alpha_3=n-2-\alpha_1-\alpha_2=0,3$ .

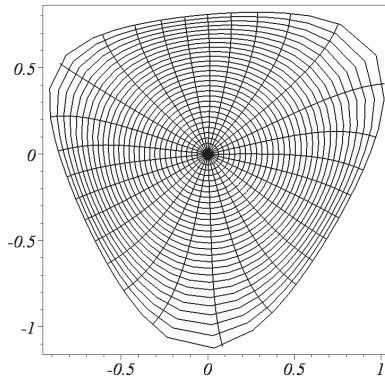


Рисунок 4.2 – Результат роботи програми у прикладі 4.1

**Приклад 4.2.** На рис. 4.3 наведено зображення для  $n=5$ ;  $a_1=-2$ ;  $a_2=-0,3$ ;  $a_3=0$ ;  $a_4=0,3$ ;  $a_5=2$ ;  $\alpha_1=0,6$ ;  $\alpha_2=0,6$ ;  $\alpha_3=0,6$ ;  $\alpha_4=0,6$ ;  $\alpha_5=n-2-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=0,6$ .

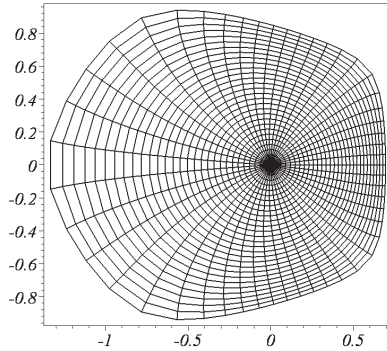


Рисунок 4.3 – Результат роботи програми у прикладі 4.2

Коли  $n$ -кутник є правильним з центром у початку координат площини  $w$ , то зручно застосовувати функцію:

$$w = C \int_0^z (1-t^n)^{-2/n} dt, \quad (4.6)$$

яка конформно відображує одиничний круг  $|t| \leq 1$  на цей  $n$ -кутник.

На рис. 4.4 наведено зображення, одержані в результаті конформних перетворень одиничних кругів на правильні  $n$ -кутники при  $n=3$ ,  $n=4$  і  $n=5$ .

У випадку відображення круга одиничного радіуса на зовнішню область  $n$ -кутника необхідно використовувати формулу:

$$w = C \int_0^z \frac{1}{t^2} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t}{b_k}\right)^{\alpha_k - 1} dt + C_1. \quad (4.7)$$

На рис. 4.5 наведено зображення, одержані в результаті конформних перетворень одиничних кругів на зовнішні області  $n$ -кутників при  $n=3$ ,  $n=4$  і  $n=5$ .

Нехай на комплексній площині  $w$  задано трикутник з вершинами  $A_1, A_2, A_3$  і внутрішніми кутами  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi$  і  $\alpha_3\pi$ , де  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ . Функція:

$$w = f(z) = C \int_{z_0}^z (t-a_1)^{\alpha_1-1} (t-a_2)^{\alpha_2-1} (t-a_3)^{\alpha_3-1} dt + C_1 \quad (4.8)$$

(де  $z_0$ ,  $C$  та  $C_1$  – задані комплексні сталі, а  $a_1$ ,  $a_2$  і  $a_3$  – дійсні числа, розташовані в порядку зростання) і здійснює необхідне конформне відображення. Ця функція є інтегралом Крістоффеля – Шварца.

В інтегралі Крістоффеля – Шварца беруться лише ті гілки підінтегральних функцій, що є безпосереднім аналітичним продовженням у верхню півплощину відповідних дійсних функцій. Це забезпечує взаємну однозначність такого відображення.

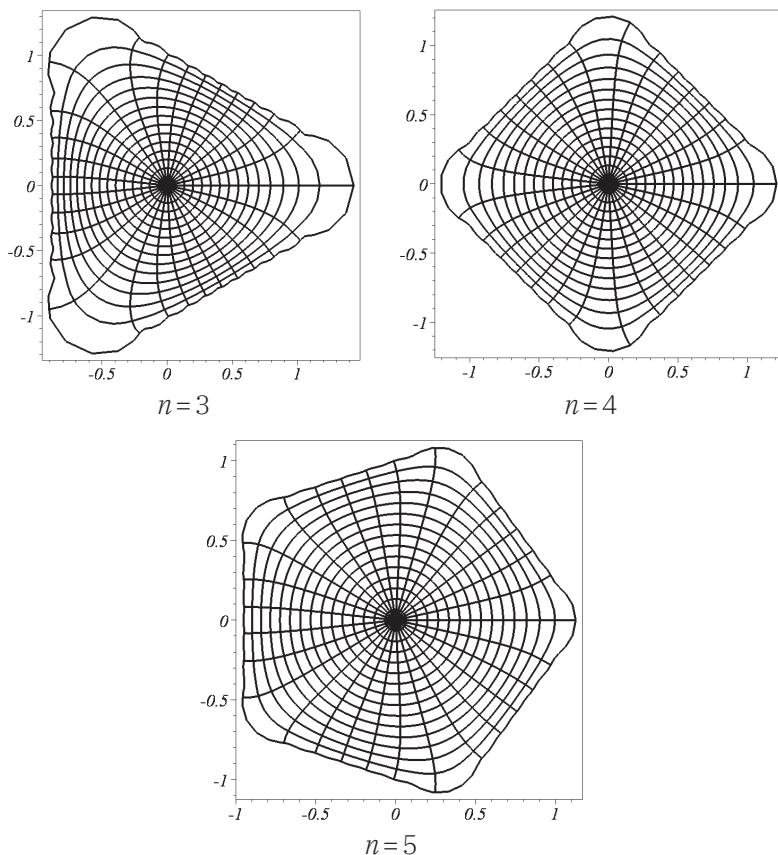


Рисунок 4.4 – Приклади результатів відображень на внутрішні області правильних  $n$ -кутників

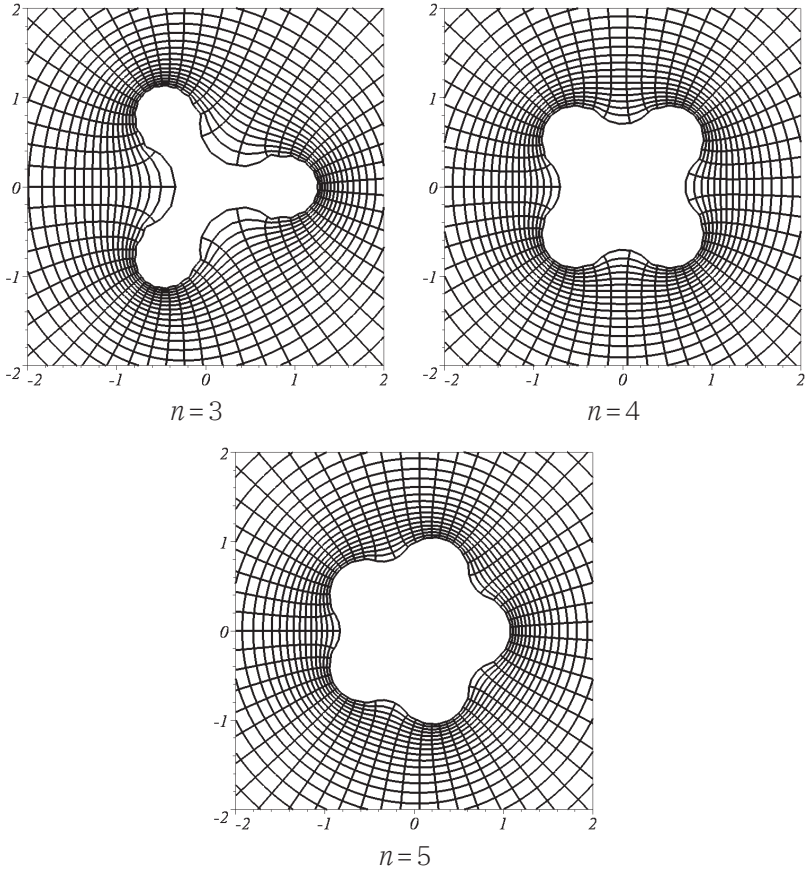


Рисунок 4.5 – Приклади результатів відображень на зовнішні області правильних  $n$ -кутників

Якщо яке-небудь число  $\alpha_k$  є від'ємним, то відповідний кут береться рівним  $\alpha_k\pi$ .

Якщо в одну з вершин при конформному відображенні переходить точка, що знаходиться на  $+\infty$ , то відповідним множником у підінтегральній функції можна знехтувати.

Інші точки  $\alpha_k$  вибираються довільним чином. Константи  $C$  і  $C_1$  вибирають за умовою відповідності точок  $A_k$  й  $\alpha_k$ .

### 4.2.2. Конформне відображення круга на внутрішню і зовнішню області $n$ -кутника

Розглянемо конформне відображення круга одиничного радіуса  $|z| < 1$  на внутрішню область десятикутника у вигляді правильної "п'ятипроменевої зірки" (рис. 4.6).

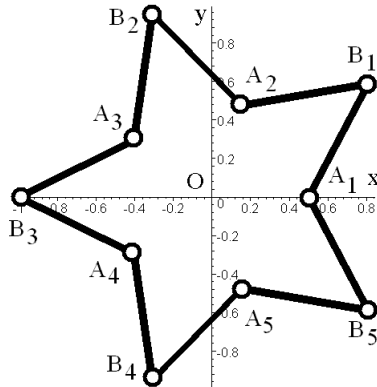


Рисунок 4.6 – Приклад правильного десятикутника

Нехай область зірки на комплексній площині являє собою десятикутник, п'ять кутів якого  $\alpha = 5/7$  і п'ять кутів  $\beta = 1/5$ . Розміри зірки визначаються виразами  $OB_k = R$  та  $OA_k = R/C$ , де  $R$  і  $C$  – дійсні числа.

Між вершинами десятикутника і точками на колі одиничного радіуса є відповідність, згідно з якою точки  $A_k$  переходять у (корені п'ятого степеня із 1), а  $B_k$  – в  $b_k = \exp\left(\frac{i2\pi(2k-1)}{5}\right)$  (корені п'ятого степеня із  $-1$ ); тут  $k = 1, 2, \dots, 5$ .

За формулою Крістоффеля – Шварца відображення круга  $|z| < 1$  на внутрішню область десятикутника описується у вигляді:

$$w(z) = C \int_0^z \frac{(1-z^5)^{2/5}}{(1+z^5)^{4/5}} dz, \quad (4.10)$$

де константа  $C$  визначається за розміром променя зірки  $OB_k=R$ . Оскільки точка  $z=-1$  переходить у вершину, а  $z=0$  – у центр комп-

лексної площини, то  $R=C \int_{-1}^0 \frac{(1-x^5)^{2/5}}{(1+x^5)^{4/5}} dx$ , звідки  $C=0,4519R$ .

Оскільки значення інтеграла точно обчислити неможливо, то підінтегральну функцію довелося розкласти в околі точки 0 в ряд Тейлора степеня  $N$ .

На рис. 4.7 наведено приклад виконання програми для різних значень  $N$ . Зазначимо, що зі збільшенням значення  $N$  зображення суттєво не змінюється.

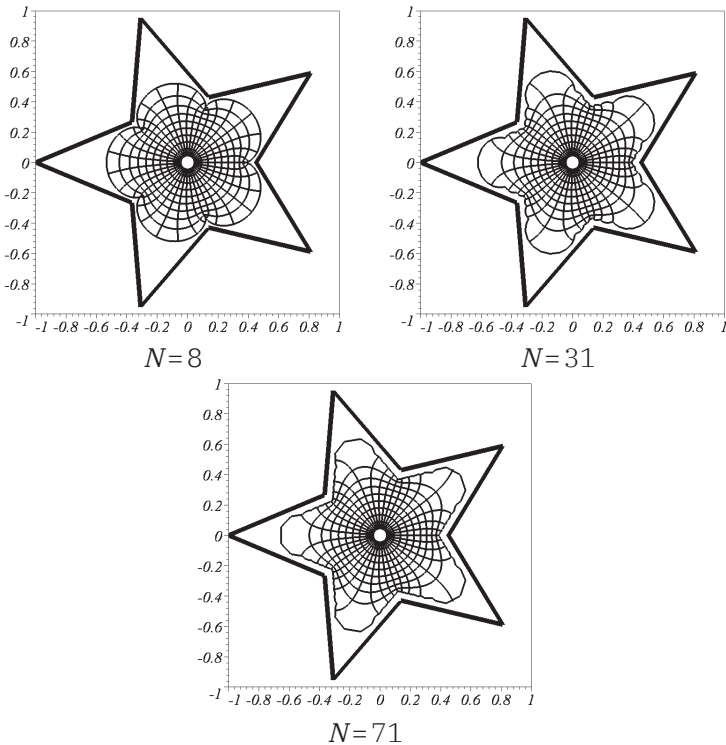


Рисунок 4.7 – Квазіпаралельні криві всередині десятикутника залежно від степеня  $N$  розкладу в ряд Тейлора



Формула Крістоффеля – Шварца для відображення круга  $|z| < 1$  на зовнішню область десятикутника має вигляд:

$$w(z) = C \int_0^z \frac{(1-z^5)^{2/5}}{z^2(1+z^5)^{4/5}} dz,$$

де  $C = 0,4519R$  визначається розміром променя зірки  $OB_k = R$ .

На рис. 4.8 наведено результат такого конформного відображення.

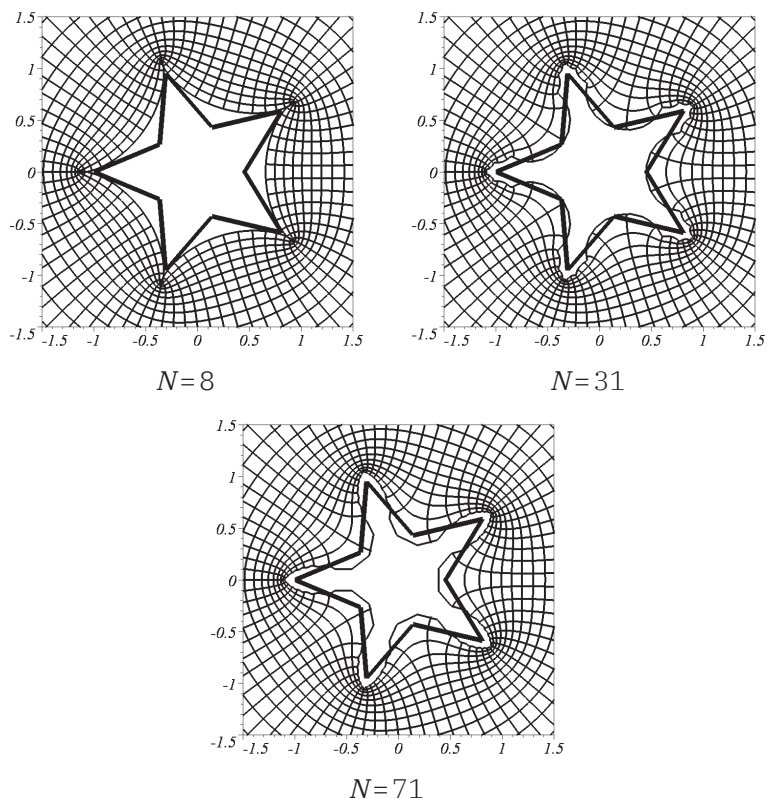


Рисунок 4.8 – Квазіпаралельні криві зовні десятикутника залежно від степеня  $N$  розкладу в ряд Тейлора

### 4.2.3. Універсальний підхід до конформного відображення круга одиничного радіуса на заданий $n$ -кутник

Для забезпечення *універсальності підходу* до побудови картин квазіпаралельних кривих як результату конформних відображень на заданий  $n$ -кутник слід подавати будь-який  $n$ -кутник як *множину відрізків*, тобто кожна зі сторін разом з прилеглими кутами до сусідніх сторін розглядатиметься окремо.

Для побудови *конформного відображення круга одиничного радіуса на десятикутник*, коли сторони останнього обрано "поодиноці", використовуємо формулу Крістоффеля – Шварца:

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - a_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - a_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz + C_1. \quad (4.11)$$

Тут  $\alpha_k$  – внутрішні кути багатокутника,  $a_k$  – точки одиничного кола, які відповідають вершинам багатокутника,  $C$  і  $C_1$  – деякі константи.

Для обчислення кутів розглянемо трикутник  $OAB$  і з нього знайдемо кути, які визначають форму десятикутника (рис. 4.9):

$$\theta = \arccos \frac{\operatorname{Re}(B_1) - \operatorname{Re}(A_1)}{\sqrt{(\operatorname{Re}(B_1) - \operatorname{Re}(A_1))^2 + (\operatorname{Im}(B_1) - \operatorname{Im}(A_1))^2}}; \quad (4.12)$$

$$\alpha_k = 2(\pi - \theta); \quad \beta_k = 2(\theta - \pi/5),$$

де  $k = 1, 2, \dots, 5$ .

Легко переконатися у тому, що для цих значень виконується необхідна тотожність  $\sum_{k=1}^5 (\alpha_k + \beta_k) = 2\pi$ .

Для визначення точок на колі одиничного радіуса, які відповідають вершинам правильного десятикутника, застосовуємо формулу  $a_k = \exp(i\pi k/5)$ , в результаті чого одержуємо значення  $a_k$  для  $k = 1, 2, \dots, 10$ .

На рис. 4.10 подано результат виконання програми.

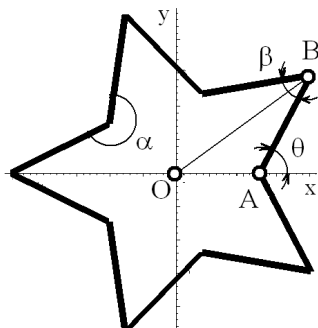


Рисунок 4.9 – Кути, що визначають форму десятикутника

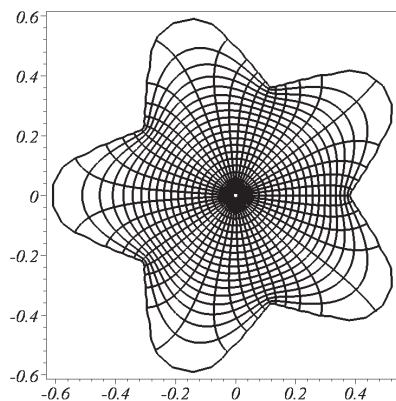


Рисунок 4.10 – Результат виконання програми наближеної побудови конформного відображення на *внутрішню* область десятикутника

Конформно відобразити круг  $|z| < 1$  на *зовнішню область, обмежену десятикутною ламаною як множиною відрізків*, слід за допомогою функції:

$$w = C \int_0^z \frac{1}{z^2} (z - a_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - a_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - a_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz + C_1, \quad (4.13)$$

Результат відображення показано на рис. 4.11.

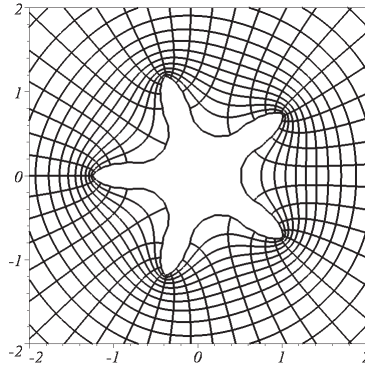


Рисунок 4.11 – Результат виконання програми наближеної побудови конформного відображення на *зовнішню* область десятикутника

На рис. 4.12 наведено послідовність результатів відображень для кожного з елементів, а також загальний результат, у тестовому прикладі виконання алгоритму і програми для зображення сітки ліній обтікання повітряною масою "профілю крила Жуковського".

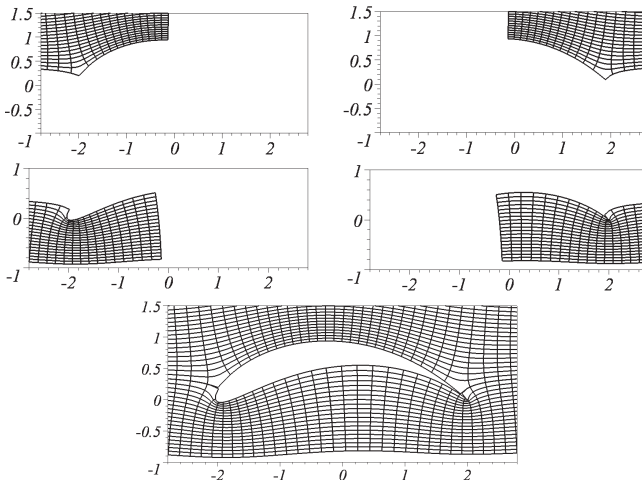


Рисунок 4.12 – Тест відображення кола на "профілю крила Жуковського"

Ця модель є результатом конформного відображення, яке здійснює функція  $w = 1/2(z + 1/2)$ . Тут на "профіль крила Жуковського" відображується коло, що проходить через точку  $z_1 = 1$  і містить усередині точку  $z_2 = -1$ . Профіль розглядався як сукупність окремих елементів.

### 4.3. Розв'язання граничної задачі теорії фільтрації

Інженерну практику цікавлять дослідження фізичних полів тисків і швидкостей рідини під греблями. Саме за цими полями розраховують зони, де можливе інтенсивне вимивання ґрунту, обчислюють тиски фільтраційного потоку на греблю, що впливає на забезпечення її міцності, а також визначають витрати рідини з водоймища за рахунок фільтрації тощо.

Розглянемо двовимірну схему фільтрації під серединним перерізом протяжної греблі (рис. 4.13). Фільтрацію можна моделювати плоско-паралельною течією. Припустимо, що гребля бетонна, тоді непроникною є границя  $AB$  її основи на ґрунті (цю границю називають *флотбетом*). Припустимо, що водоймища перед і за греблею (верхній і нижній *б'єфи*) стикаються з ґрунтом по півпрямих  $CA$  і  $BD$ , які належать одній горизонталі. Також припустимо, що ґрунт має однорідну структуру.

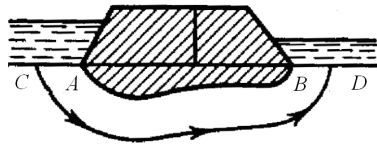


Рисунок 4.13 – Схема фільтрації під серединним перерізом греблі

З метою формалізації постановки задачі вважатимемо, що  $G$  – область комплексної площини  $w$ , границю  $L$  якої розділено точками  $w_1$  і  $w_2$  на три частини  $L_1 = CA$ ,  $L_2 = AB$  і  $L_3 = BD$ , з яких  $L_1$  і  $L_3$  є необмеженими. Постановка граничної задачі для рівняння Лапласа має вигляд:

$$\Delta U = 0; \quad U \Big|_{L_1} = U_1; \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{L_2} = 0; \quad U \Big|_{L_3} = U_3. \quad (4.14)$$

Математичне моделювання фільтрації ґрунтових вод під греблею зводиться до змішаної граничної задачі (4.14). У цьому випадку область  $G$  являє собою криволінійну фігуру, крива  $L_2$  – непроникну поверхню споруди (флютбет), а криві  $L_1$  і  $L_3$  є ізобарами – променями горизонтальних прямих, що визначають:  $L_1$  – дно верхнього б'єфа,  $L_3$  – дно нижнього б'єфа греблі.

Спорідненою до задачі моделювання фільтрації ґрунтових вод під греблею є задача про розподіл електричного струму  $J$  на площині в області  $G$ . У цьому випадку ділянка  $L_2$  вважається електрично ізольованою, а ділянки  $L_1$  і  $L_3$  будуть екіпотенціалами із заданими значеннями потенціалів  $U_1$  і  $U_2$ . Тоді гармонічне векторне поле  $J$  матиме потенціал  $U(u, v)$ , що являтиме собою розв'язок змішаної граничної задачі для рівняння Лапласа (4.14). На цих положеннях базується принцип дії приладів для фізичного моделювання фільтрації ґрунтових вод шляхом визначення розподілу електричного струму у гальванічних середовищах.

Крім того, наведене порівняння дозволяє наочно подати деякі параметри фільтрації. Так, сумісно з гармонічним полем  $J = \text{grad } U$  має сенс розглядати і гармонічно-спряжене поле  $A = J^*$ . Векторне поле  $A$  характеризує густину електричного струму в області  $G$  у тому випадку, коли ділянка її границі  $L_2$  являє собою електрод, через який у пластинку подається струм  $I = U_2 - U_1$ . Інший електрод вважається розташованим у нескінченно віддаленій точці, а ділянки  $L_1$  і  $L_3$  – електрично ізольованими (вони являють собою лінії струму для поля  $A$ ).

Що стосується задачі фільтрації, то лінії рівня поля розподілу електричного струму можна інтерпретувати як картину руху ґрунтових вод під греблею, непроникна основа якої може бути деяким відрізком дійсної осі (для плоского флютбету) і розрізом уздовж відрізка уявної осі  $[0, -i]$  (для флютбету у вигляді шпунта).

Щодо *графічної інтерпретації фізичних полів  $J$  і  $A$*  задача полягає у тому, що необхідно побудувати конформне відображення області  $G$  на адекватну область – півсмугу  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$ . Конкретно: потрібно конформно відобразити область  $G$  на півсмугу так, щоб

точка  $w = \infty$  відобразилася в точку  $z = \infty$ , а точки  $w_1$  і  $w_2$  – відповідно, в точки  $z_1 = i\pi$  і  $z_2 = 0$ .

Побудувати зазначене відображення можна наступним чином. Нехай функція  $t = F(w)$  конформно відображує область  $G$  на верхню півплощину  $\text{Im } t > 0$  так, що точка  $w = \infty$  відображується у точку  $t = \infty$ . Позначимо  $p_1 = F(w_1)$ ,  $p_2 = F(w_2)$ . Крива  $L_2$  відображується функцією  $F(w)$  у відрізок дійсної осі  $[p_1, p_2]$ . У результаті лінійного перетворення  $s = (2t - p_1 + p_2)/(p_2 - p_1)$  область  $G$  відображується у верхню півплощину  $\text{Im } s > 0$ , крива  $L_2$  – у відрізок  $[-1, 1]$ . Нарешті, функція гіперболічного арккосинуса  $z = \text{arch } s$  відображує півплощину  $\text{Im } s > 0$  на півсмугу  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$  з потрібною відповідністю границь.

Обернене відображення півсмуги на область  $G$  здійснюється за допомогою послідовності перетворень:

$$s = \text{ch } z; \quad t = \frac{s(p_2 - p_1) + p_1 + p_2}{2} \text{ch } z; \quad w = f(t), \quad (4.15)$$

де  $f(t)$  є функцією, оберненою до функції  $t = F(w)$ .

Функція (4.15) відображує декартову сітку в півсмузі  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$  у сітку еквіпотенціалей і ліній струменів для гармонічних векторних полів  $J$  і  $A$ . За допомогою функції (4.15) можна графічно зобразити розв'язок змішаної граничної задачі. При цьому розташунок границі  $L_2$  можна змінювати, варіюючи дійсні параметри  $p_1$  і  $p_2$  (вважаючи, що  $p_2 > p_1$ ).

На рис. 4.14 зображено традиційну схему греблі та ескіз процесу фільтрації, а на рис. 4.15 – геометричне моделювання фільтрації під флютбетом греблі залежно від значень параметрів  $p_1$  і  $p_2$ . Сітка ліній інтерпретується як картина руху ґрунтових вод під греблею, непроникна основа якої є деяким відрізком дійсної осі (флютбет) і розрізом уздовж відрізка уявної осі  $[0, -i]$  (шпунт). Образами відрізків прямих  $\text{Re } z = \text{const}$ ,  $0 < \text{Im } z < \pi$  будуть лінії струменів, а образами променів  $\text{Im } z = \text{const}$ ,  $\text{Re } z > 0$  – лінії однакового тиску (ізобари). Конформне відображення ортогональної сітки прямокутника на комплексній площині  $0 < \text{Re } z < \text{const}$ ,  $0 < \text{Im } z < \pi$  здійснює однолиста аналітична функція  $W(z)$ .

На рис. 4.16 і 4.17 наведено приклади побудови конформних відображень, де сітки ліній можна інтерпретувати як картини руху ґрунтових вод під час фільтрації в каналах складної форми.

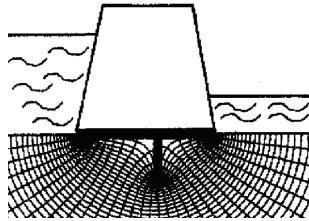


Рисунок 4.14 – Схема фільтрації під флютбетом греблі зі шпунтом

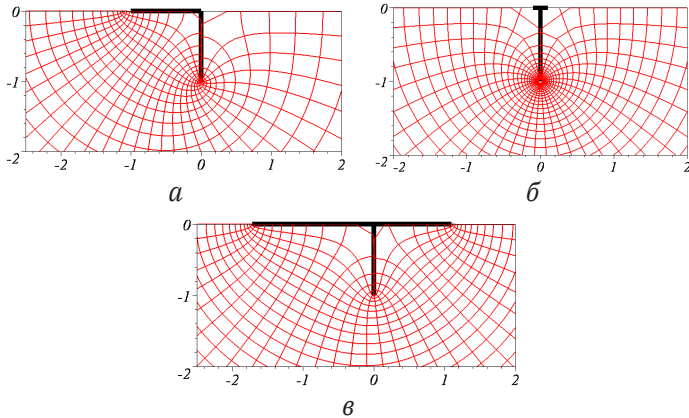


Рисунок 4.15 – Приклади відображень за допомогою функції  $w(t) = -i\sqrt{1-t^2}$  в геометричному моделюванні фільтрації під флютбетом греблі залежно від значень  $p_1$  і  $p_2$ : **а** –  $p_1 = 0$  і  $p_2 = 1,5$ ; **б** –  $p_1 = -0,1$  і  $p_2 = 0,1$ ; **в** –  $p_1 = -1,5$  і  $p_2 = 2$

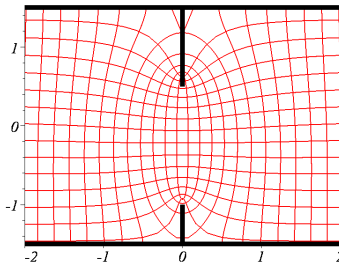


Рисунок 4.16 – Геометричне моделювання течії в прямому каналі з "ширмами" ( $w(t) = -i\arcsint$ ,  $p_1 = -0,6$  і  $p_2 = 0,8$ )



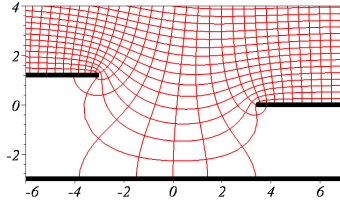


Рисунок 4.17 – Моделювання фільтрації рідини в каналі з розривом ( $w(z) = cz + h \ln(z+1) - \ln(z-1)$ ,  $c = 1$  і  $h = 1,4$ )

Такі картини полів фільтрації допомагають дослідити зміну фізичних параметрів фільтрації, а саме: тисків і швидкостей. За полями тисків і швидкостей рідини прогнозуються зони, де імовірно вимивання ґрунту, обчислюються тиски фільтраційного потоку на греблю, від чого залежить забезпечення її міцності, а також визначаються витрати рідини з водоймища за рахунок фільтрації. Це допомагає планувати заходи щодо запобігання руйнуванню берегів, що є актуальним для населених пунктів на узбережжі річок.

#### 4.4. Геометрична інтерпретація силових ліній вихору

##### 4.4.1. Геометрична інтерпретація комплексних потенціалів аналітичних функцій

Значна кількість задач математичної фізики описується векторними полями  $\{\mathbf{V}\}$ . Позначимо компоненти вектора  $\mathbf{V}$  як  $V_x$  і  $V_y$ . Тоді стаціонарні плоскопаралельні процеси в однорідних середовищах у декартових координатах описуються як:

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Плоско-паралельний процес описується рівняннями:

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.16)$$

Функції  $\phi$  і  $\psi$  задовольняють умови Коші – Рімана.

Розв'язками задач будуть аналітичні функції вигляду:

$$W(z) = \phi + i\psi, \quad (4.17)$$

де  $W$  – комплексний потенціал;  $\psi$  – функція струменя;  $\phi$  – потенціал поля.

Аналітичні функції визначаються *особливими точками*. Якщо відсутні особливі точки, ці функції вироджуються у сталі величини.

У задачах математичної фізики особливі точки комплексних потенціалів є моделями джерел, що викликають явище. Наприклад, особливим точкам може відповідати джерело тепла, що утворює теплове поле, або електричний струм у провіднику, навколо якого утворюються електричні та магнітні поля тощо. За допомогою особливих точок також задовольняються граничні умови зазначених задач.

*Логарифмічна особлива точка комплексного потенціалу*, що відповідає у фізичних задачах джерелу (або стоку), відносно функції  $\phi$  є фундаментальним розв'язком *рівняння Лапласа*, яке ця функція задовольняє. До того ж ця особлива точка є найпростішою моделлю збудника фізичного поля.

Наведемо *графічне пояснення утворення сім'ї екіпотенціалей і ліній струменів фізичних полів з логарифмічними особливими точками їхніх комплексних потенціалів*. Запишемо комплексний потенціал джерела збудження поля у вигляді:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \phi + i\psi, \quad (4.18)$$

де  $z_0$  – джерело і  $z - z_0 = r \exp(i\theta)$ .

Компоненти вектора  $\mathbf{V}$  у полярних координатах  $(r, \theta)$  визначаються тотожностями  $V_r = \partial\phi/\partial r = Q/2\pi r$ ,  $V_\theta = \partial\phi/r\partial\theta = 0$ .

З цих формул випливає, що лініями струменів будуть промені  $\theta = \text{const}$ , які виходять з точки  $z_0$ . Уздовж них від точки  $z_0$  буде спрямований вектор  $\mathbf{V}$ . Екіпотенціали являють собою концентричні кола ( $r = \text{const}$ ). Витрата вектора  $\mathbf{V}$  через коло з центром  $z_0$  визначається таким чином:

$$\int_0^{2\pi} V_r r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} r d\theta = Q. \quad (4.19)$$

Величину  $Q$ , що не залежить від  $r$ , називають *потужністю джерела*.

На рис. 4.18 при  $Q = 10$  зображено інтерпретацію утворення еквіпотенціалей (концентричних кіл) і ліній струменя (радіальних променів) як ліній рівня графіків функцій  $\phi$  і  $\psi$  з виразу (4.18).

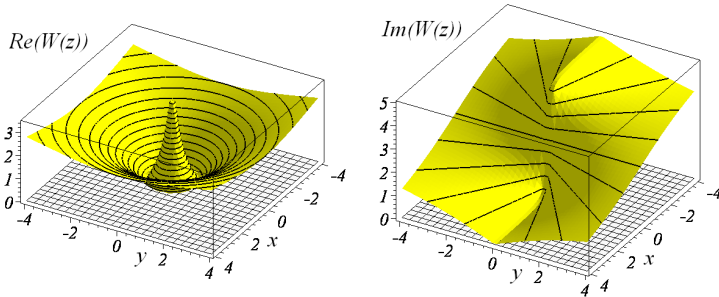


Рисунок 4.18 – Графіки функцій  $\phi$  і  $\psi$  з виразу (4.18) при  $Q = 10$

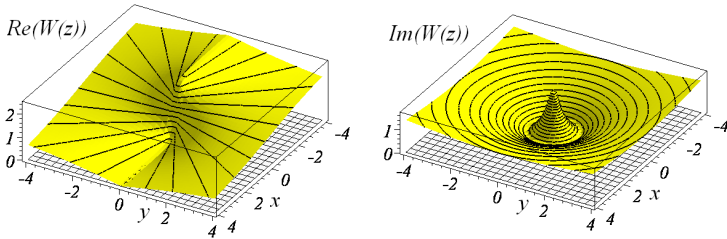
За допомогою комплексного потенціалу джерела (або стоку) можна побудувати комплексні потенціали з різними особливими точками, що використовуються у фізичних задачах, а саме: помінявши місцями  $\phi$  і  $\psi$ , що відповідає добутку рівностей (4.18) на комплексну одиницю  $i$ , одержуємо комплексний потенціал течії поля, яка називається *вихором*:

$$W(z) = \pm \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln(z - z_0) = \pm \frac{\Gamma}{2\pi} (-\theta + i \ln r) = \phi + i\psi. \quad (4.20)$$

Координати вектора  $\mathbf{V}$  цієї течії поля такі:  $V_r = 0$ ,  $V_\theta = \pm\Gamma/(2\pi r)$ . Еквіпотенціали (радіальні промені) та лінії струменя (концентричні кола) визначаються як лінії рівня графіків функцій  $\phi$  і  $\psi$  з виразу (4.20) (рис. 4.19).

Циркуляція  $\mathbf{V}$  по колу радіуса  $r$  з центром у точці  $z_0$  має вигляд:

$$\int_0^{2\pi} V_\theta r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \Gamma. \quad (4.21)$$


 Рисунок 4.19 – Графіки функцій  $\phi$  і  $\psi$  з виразу (4.20) при  $\Gamma = 5$ 

Величину  $\Gamma$  називають *напругою вихору*. Із порівняння формул (4.18) і (4.20) очевидно, що вихор можна розглядати як джерело з уявною витратою.

Використовуючи принцип накладення процесів, знаходимо комплексний потенціал  $W(z)$  як суму формул (4.18) і (4.20):

$$W(z) = \frac{Q + \Gamma i}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (4.22)$$

Звідси,

$$\phi = \frac{1}{2\pi} (Q \ln r - \Gamma \theta); \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (Q\theta + \Gamma \ln r); \quad (4.23)$$

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}; \quad V_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (4.24)$$

У цьому випадку  $V_r/V_\theta = Q/\Gamma$ ; отже, лінії струменів цієї течії спрямовані під однаковими кутами до променів  $r$ , що виходять з особливої точки, яку називають *вихороджерелом*.

На рис. 4.20 показано еквіпотенціали поля (криві, радіус-вектор яких збільшується в напрямі руху стрілки годинника), а на рис. 4.21 – лінії струменів (те ж саме, але в напрямі, протилежному напрямку руху стрілки годинника) при  $Q = 10$  і  $\Gamma = 5$ .

Еквіпотенціали та лінії струменів фізичного поля з логарифмічними особливими точками комплексних потенціалів є лініями рівня функцій  $\phi$  і  $\psi$  з виразів, що входять до описів їх дійсних і уявних частин.

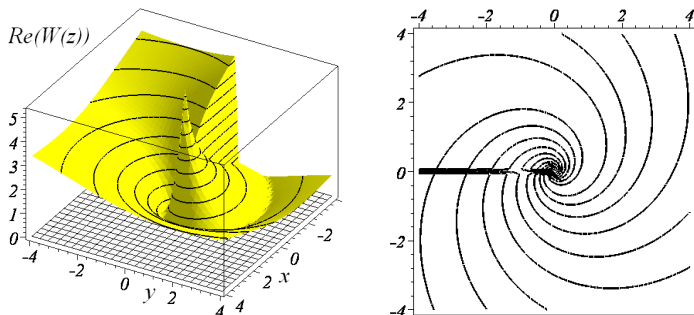


Рисунок 4.20 – Еквіпотенціали вихору як лінії рівня графіку функції  $\phi$  при  $Q=10$  і  $\Gamma=5$

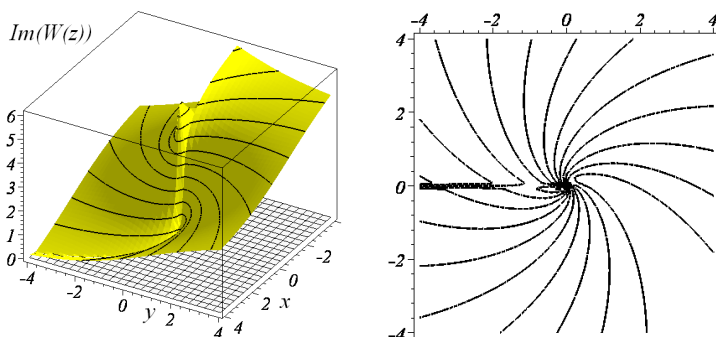


Рисунок 4.21 – Лінії струменів як лінії рівня функції  $\psi$  при  $Q=10$  і  $\Gamma=5$

#### 4.4.2. Графічне пояснення формування силових ліній вихору

У підрозділі 4.3 розглянуто розв'язання граничної задачі фільтрації. Графічна інтерпретація фізичних полів  $J$  і  $A$  через побудову конформного відображення області  $G$  на адекватну область – півсмугу  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$  – може бути здійснена із залученням *операції вихору*. При цьому необхідно відобразити область  $G$  на півсмугу так, щоб точка  $w = \infty$  відобразилася в точку  $z = \infty$ , а точки  $w_1$  і  $w_2$  – відповідно в точки  $z_1 = i\pi$  і  $z_2 = 0$ .

Спочатку наведемо геометричне пояснення формоутворення силових ліній вихору з центром у точці  $z_0$  шляхом побудови просторових графіків дійсної та уявної частини потенціалу вихору  $W(z) = (Q + i\Gamma)/2\pi \ln(z - z_0)$ , де  $Q$  – потужність вихору і  $\Gamma$  – напруга вихору.

На рис. 4.22–4.24 зображено просторові графіки функцій  $W(z)$ ,  $\text{Re } W(z)$  та  $\text{Im } W(z)$ .

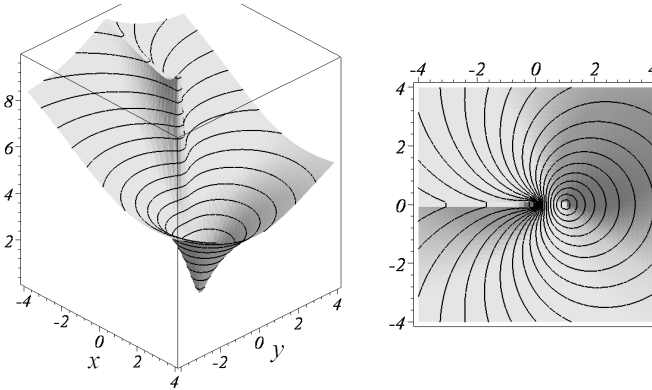


Рисунок 4.22 – Просторовий графік функції  $W(z)$  і силові лінії вихору

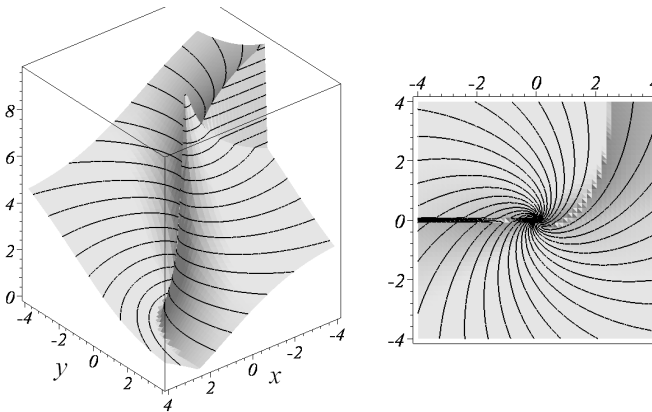


Рисунок 4.23 – Просторовий графік функції  $\text{Re } W(z)$  і силові лінії вихору

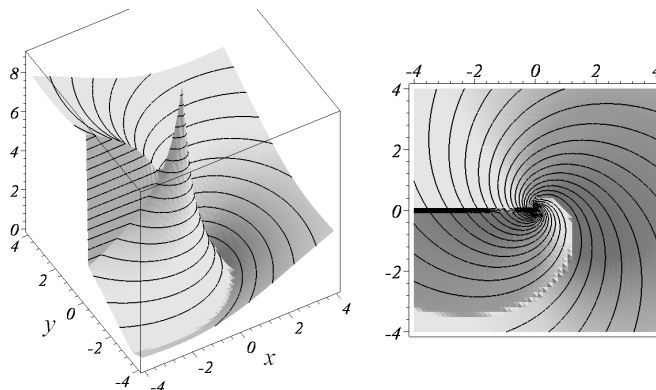


Рисунок 4.24 – Просторовий графік функції  $\text{Im}W(z)$  і силові лінії вихору

Формоутворення силових ліній вихору логічно поєднано з ортогональним проєкціюванням на площину  $z$  перерізів просторових графіків сім'єю площин рівня. Тоді конформна сітка одержується як сукупність двох типів силових ліній вихору (за напрямком руху стрілки годинника та в протилежному напрямку).

#### 4.4.3. Графічна інтерпретація формоутворення силових ліній вихору в задачі фільтрації

Як приклад практичного застосування графічної інтерпретації формоутворення силових ліній вихору розглянемо задачу побудови зображення характерних ліній течії під "півеліптичною" греблею, де довжини півосей еліпса мають значення  $a$  і  $b$ . На рис. 4.25,  $a$  зображено схему такого типу греблі та ескізи характерних ліній фільтрації. На рис. 4.25 також зображено граничні варіанти "півеліптичної" греблі: коли  $a=0$ , маємо греблю зі шпунтовим флютбетом (рис. 4.25,  $b$ ); коли  $b=0$ , маємо греблю з плоским флютбетом (рис. 4.25,  $в$ ).

Задача про фільтрацію під греблею з флютбетом у вигляді еліпса розв'язується за допомогою комплексного потенціалу  $W = P/i\pi \ln z$ , де  $P$  – константа, яка характеризує різницю рівнів води на верхньому

і нижньому б'єфах греблі. При цьому слід застосувати конформне перетворення площини  $z$  у площину  $w$ , при якому базове півколо радіуса  $r = r_0$  переходить у заданий еліпс, а границі б'єфів розташовані уздовж осі  $Ox$ .

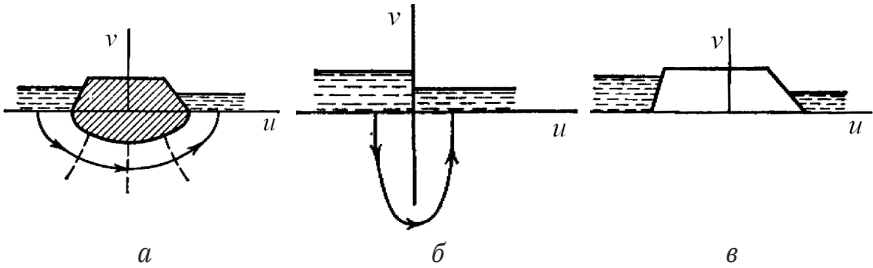


Рисунок 4.25 – Схеми фільтрації:  
**a** – під греблею з "півеліптичним" флютбетом; **б** – під греблею зі шпунтовим флютбетом ( $a = 0$ ); **в** – під греблею з плоским флютбетом ( $b = 0$ )

Для моделювання ліній струменів та ізобар під греблею використовуємо формулу конформного перетворення Жуковського:

$$z = \frac{r_0}{a+b} (w + \sqrt{w^2 - a^2 + b^2}). \quad (4.25)$$

Тоді течія під греблею з півеліптичним флютбетом у площині  $z$  (після зміни позначень  $w$  на  $z$ ) описується комплексним потенціалом:

$$W(z) = \frac{P}{i\pi} \ln \left( \frac{r_0}{a+b} (z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}) \right). \quad (4.26)$$

На основі формули (4.26) побудовано просторові графіки функцій  $\text{Re}W(z)$  і  $\text{Im}W(z)$ . В результаті при  $r_0 = 1$  і  $P = 2$  одержано геометричні моделі ізобар і ліній струменів як під "еліптичним" флютбетом, коли  $a = 4$  і  $b = 2$  (рис. 4.26–4.28), так і під його різновидами, а саме: якщо  $a = 4$  і  $b = 0$ , то флютбет буде плоским (рис. 4.29–4.31); якщо  $a = 0$  і  $b = 2$ , то флютбет буде шпунтовим (рис. 4.32–4.34).



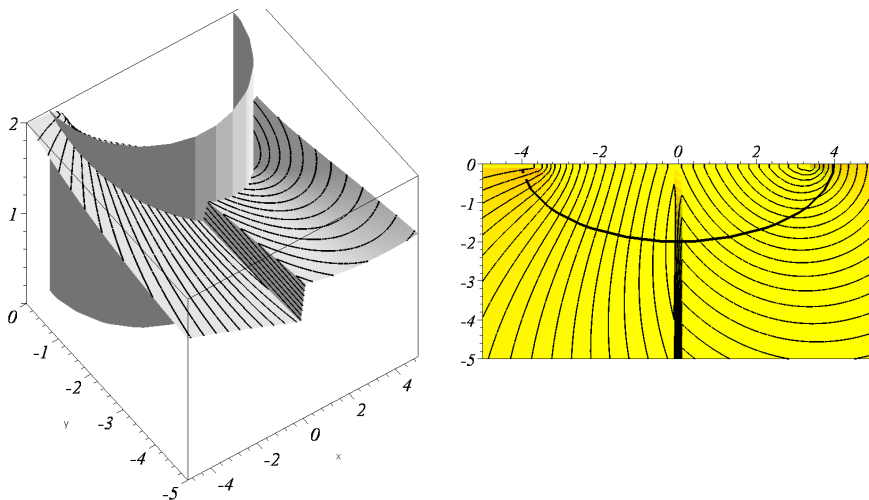


Рисунок 4.26 – Графік функції  $W(z)$  для моделювання ізобар і ліній струменів під "еліптичним" флютбетом

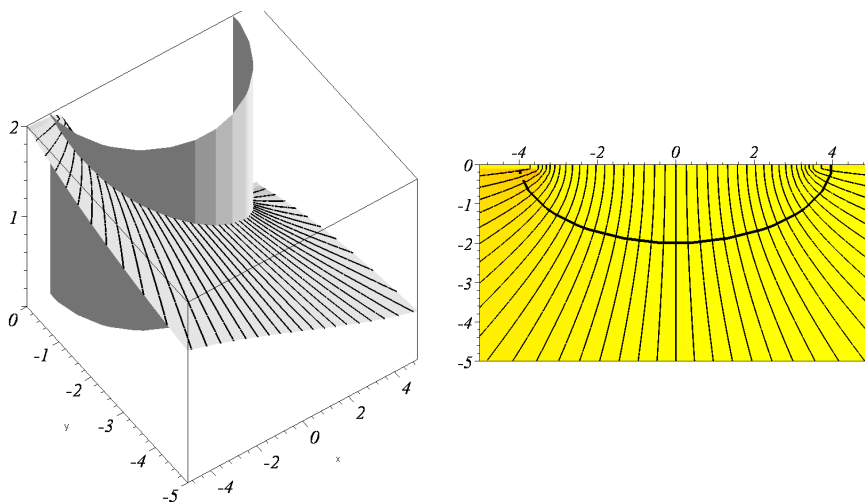


Рисунок 4.27 – Графік функції  $\text{Re } W(z)$  для моделювання ізобар під "еліптичним" флютбетом

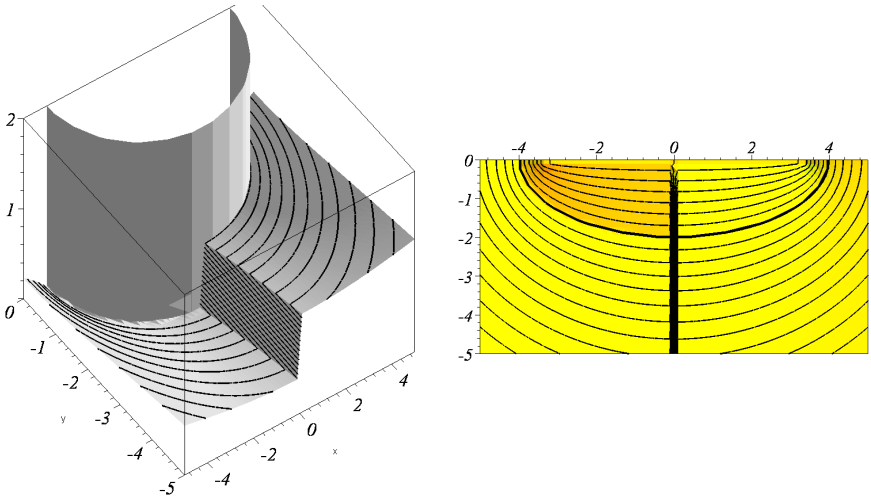


Рисунок 4.28 – Графік функції  $\text{Im } W(z)$  для моделювання ліній струменів під "еліптичним" флютбетом

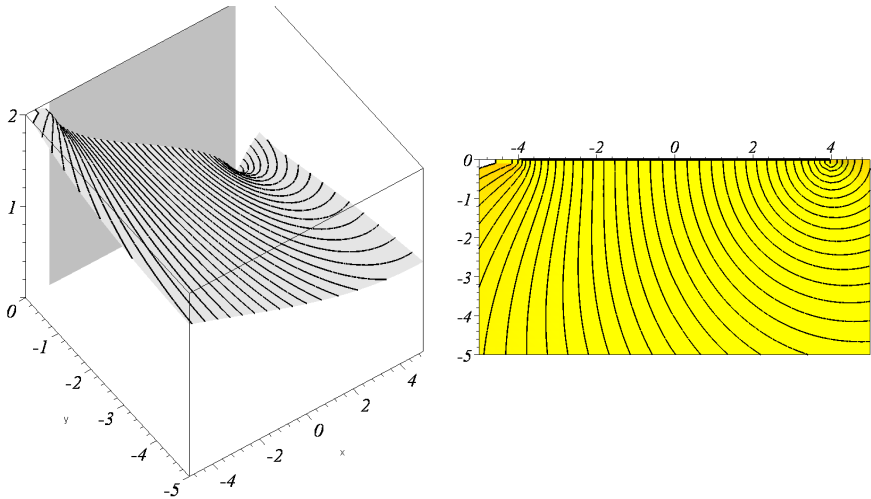


Рисунок 4.29 – Графік функції  $W(z)$  для моделювання ізобар і ліній струменів під плоским флютбетом

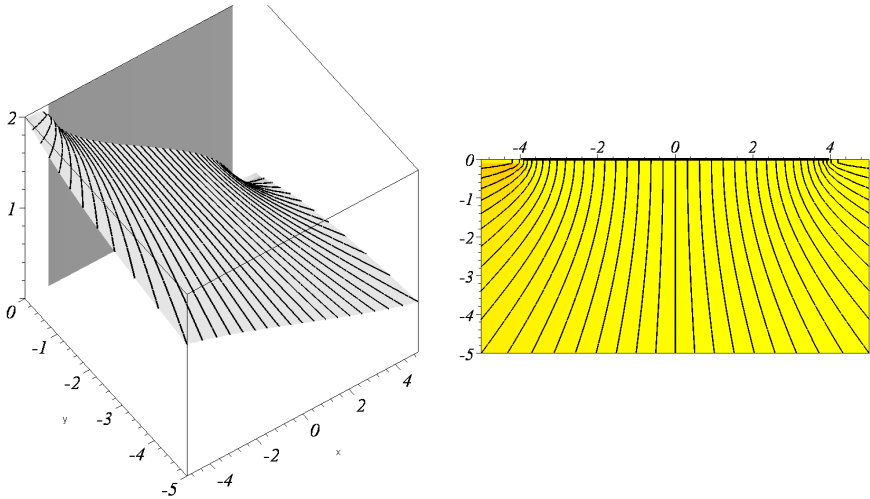


Рисунок 4.30 – Графік функції  $\operatorname{Re} W(z)$  для моделювання ізобар під плоским флютбетом

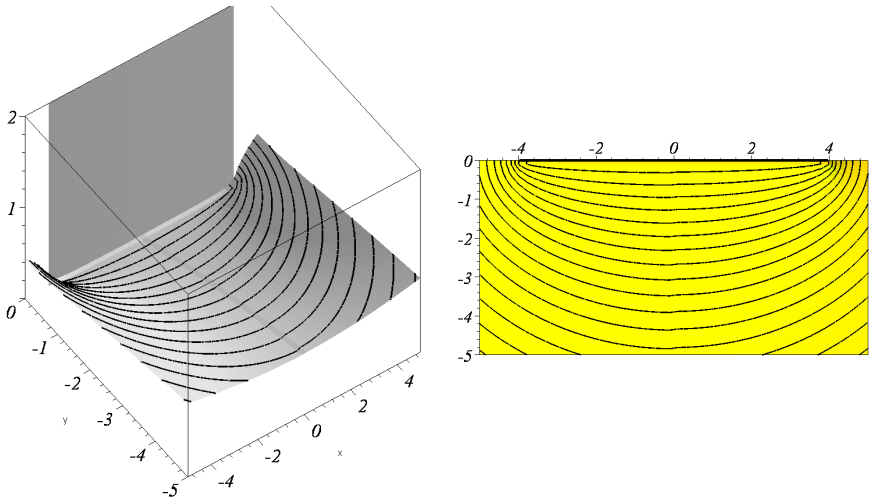


Рисунок 4.31 – Графік функції  $\operatorname{Im} W(z)$  для моделювання ліній струменів під плоским флютбетом

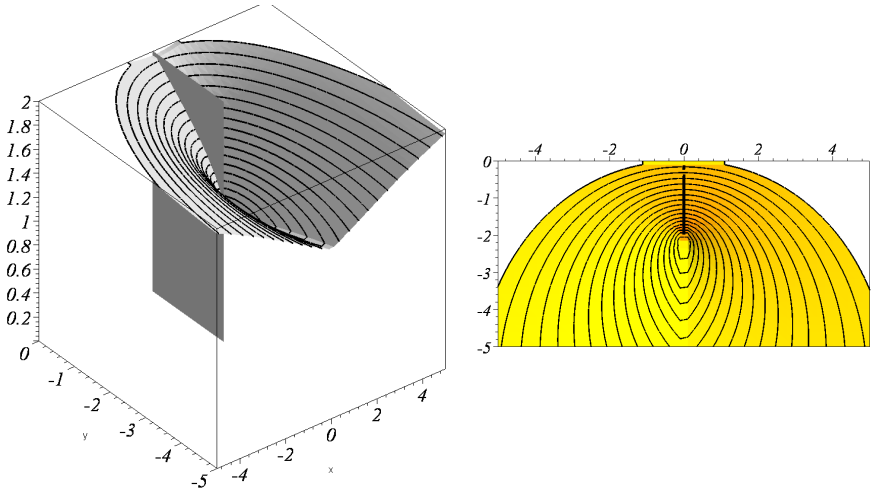


Рисунок 4.32 – Графік функції  $W(z)$  для моделювання ізобар і ліній струменів під шпунтовим флютбетом

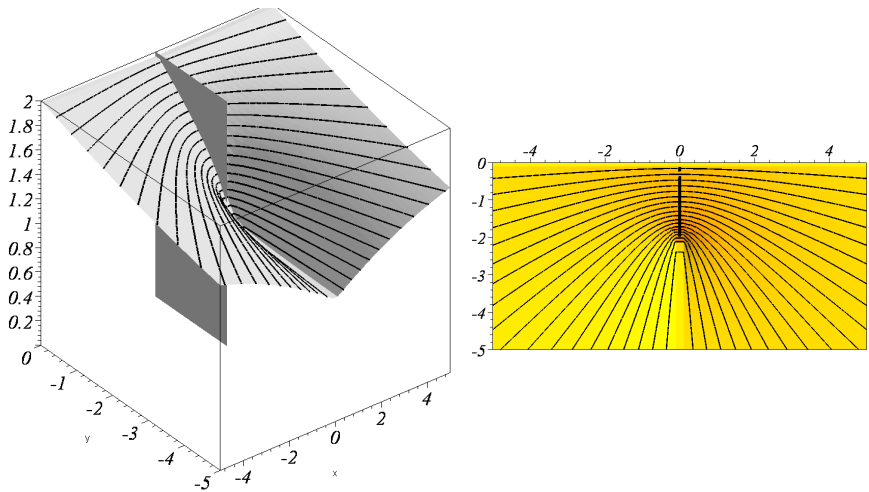


Рисунок 4.33 – Графік функції  $Re W(z)$  для моделювання ізобар під шпунтовим флютбетом

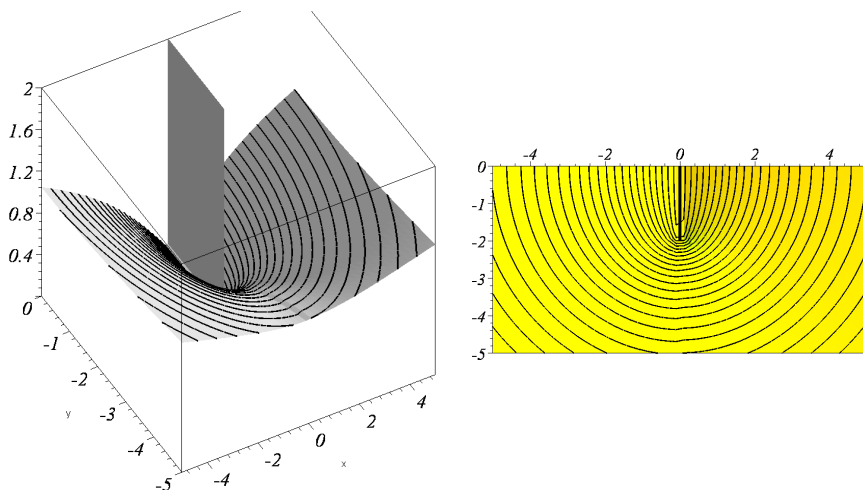


Рисунок 4.34 – Графік функції  $\text{Im } W(z)$  для моделювання ліній струменів під шпунтовим флютбетом

Зображення сітки характерних ліній пов'язують з процесом фільтрації рідини під греблею. Графічні ілюстрації допомагають проводити якісний аналіз розв'язку задачі фільтрації в умовах варіювання початкових даних.

#### 4.5. Приклади задач побудови квазіпаралельних ліній

Як було зазначено в підрозділі 4.4, сім'ї квазіпаралельних кривих, які можна одержати із застосуванням конформних відображень, є геометричною інтерпретацією розв'язків задач, що належать до різних практичних галузей, але є аналогічними за математичним змістом. Відомо, що стаціонарні процеси поширення тепла, руху електричного струму в провідному середовищі, ламінарний рух ідеальної рідини, явище дифузії, поширення магнітного потоку й потоку електричного зсуву підпорядковані диференціальному рівнянню в частинних похідних еліптичного типу – *рівнянню Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (4.27)$$

Обмеженням у таких задачах є наявність плоскопаралельного руху і відсутність джерел усередині області руху.

Функція  $U$  в рівнянні (4.27) буде набувати різного фізичного змісту для різних фізичних явищ.

Таблиця 4.1 ілюструє аналогію математичного опису різних за фізичною природою явищ.

Диференціальне рівняння (4.27), якщо задано граничні умови, має розв'язок у аналітичному вигляді тільки для відносно простих систем. У свою чергу, числові розв'язки теж обмежені, тому що у більшості систем існують особливі точки першого і другого роду. Для зазначеного класу задач ефективним методом моделювання розподілу параметрів різних систем є метод конформних перетворень. Зокрема, це стосується задач моделювання процесів фільтрації під гідротехнічними спорудами і задач моделювання картин силових ліній електричних полів.

У таблицю 4.2 зведено в цілому аналогічні поняття, що характеризують поля, утворені стаціонарними рухами ґрунтових вод у пористому середовищі та електричним струмом у провідниковому середовищі. Бачимо, наприклад, що коефіцієнти електропровідності  $\sigma$  і фільтрації  $\chi$  подібні:  $\sigma = n\chi$ ; граничні умови теж подібні:  $V = ah + b$  (тут  $a$ ,  $b$  і  $n$  – сталі величини).

З умов, наведених у таблиці 4.2, випливає, що лініям одногокового напору відповідають лінії однакової напруги, а лініям струменів – лінії струму. Алгоритми та програми прийнятні для розв'язання задач, у яких моделюються поля різної природи (електричні, електростатичні, гідродинамічні, теплові та ін.). Одержувані зображення квазіпаралельних кривих інтерпретуються як силові лінії того чи іншого поля (еквіпотенціальні лінії і лінії струму, еквіфазні лінії і лінії дотику векторів швидкостей, лінії одногокового напору і лінії струменів тощо). На геометричну модель у кожному випадку будуть впливати сама функція відображення і граничні умови.

На рис. 4.35 і 4.36 наведено приклади відображень для різних функцій відображень і різних граничних умов.

Таблиця 4.1 – Математична аналогія опису стаціонарних полів різної фізичної природи

Стаціонарне поле фільтрації рідини	Стаціонарне гідродинамічне поле ідеальної рідини	Стаціонарне електричне поле струму в провідному середовищі	Стаціонарне електричне поле в діелектрику
Закон Дарсі	Основне рівняння гідродинаміки	Закон Ома	Закон індукції
$\vec{v} = -\chi \text{grad} h$	$\vec{v} = -\text{grad} \phi_{\text{гд}}$	$\vec{j} = -\sigma \text{grad} \phi$	$\vec{D} = -\varepsilon \text{grad} \phi$
$Q = \int_S \vec{v} ds$	$G = \int_S \rho_{\text{гд}} ds$	$I = \int_S \vec{j} ds$	$Q = \int_S \vec{D} ds$
$\text{div} \vec{v} = 0$	$\text{div} \rho_{\text{гд}} \vec{v} = 0$	$\text{div} \vec{j} = 0$	$\text{div} \vec{D} = 0$
$\text{rot}(1/\chi) \vec{v} = 0$	$\text{rot} \vec{v} = 0$	$\text{rot} \vec{E} = 0$	$\text{rot} \vec{E} = 0$
		$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
$h$ – п'єзометричний напор	$\phi_{\text{гд}}$ – гідродинамічний потенціал швидкостей	$\phi$ – електричний потенціал	$\phi$ – електричний потенціал
$\vec{v}$ – швидкість фільтрації	$\vec{v}$ – швидкість рідини	$\vec{j}$ – щільність струму	$\vec{D}$ – електричний зсув
$\chi$ – коефіцієнт фільтрації	$\rho_{\text{гд}}$ – густина рідини	$\sigma$ – питома електропровідність	$\varepsilon$ – електрична проникність
$Q$ – фільтраційна витрата	$G$ – витрата маси	$I$ – сила струму	$Q$ – потік електричного зсуву
		$\vec{E}$ – напруженість електричного поля	$\vec{E}$ – напруженість електричного поля

Таблиця 4.2 – Електрогідродинамічна аналогія

Поняття, що характеризують поля, утворені ґрунтовим потоком	Поняття, що характеризують поля, утворені електричним струмом
Швидкість фільтрації $\vec{v}$	Густина струму $\vec{j}$
Компоненти вектора швидкості фільтрації:	Компоненти вектора щільності струму:
$v_x = -\chi \frac{\partial h}{\partial x};$	$j_x = -\sigma \frac{\partial V}{\partial x};$
$v_y = -\chi \frac{\partial h}{\partial y};$	$j_y = -\sigma \frac{\partial V}{\partial y};$
$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$	$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0,$
де $h = p/\gamma - y$ – функція п'єзометричного напору, $\chi$ – коефіцієнт фільтрації	де $V$ – функція напруги, $\sigma$ – коефіцієнт електропровідності
Результуюче рівняння Лапласа:	Результуюче рівняння Лапласа:
$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$
Витрата:	Сила струму:
$Q = \int_0^L v_s dL = -\int_0^L \chi \frac{\partial h}{\partial s} dL,$	$I = -\int_0^L \chi \frac{\partial V}{\partial s} dL,$
де $L$ – довжина дуги вздовж лінії однакового напору, $s$ – довжина дуги вздовж лінії струменя	де $L$ – довжина дуги вздовж лінії однакової напруженості, $s$ – довжина дуги вздовж лінії струму



У практиці дуже часто зустрічаються випадки, де ламана, на яку треба здійснити конформне відображення, складається з елементів "сходинок".

За допомогою інтеграла Крістоффеля – Шварца, що має вигляд  $w(z) = C \int_0^z \sqrt{(z+1)/(z-1)} dz$ , можна здійснювати відображення півплощини  $\text{Im } z > 0$  на ламану-"сходинку" (рис. 4.37).

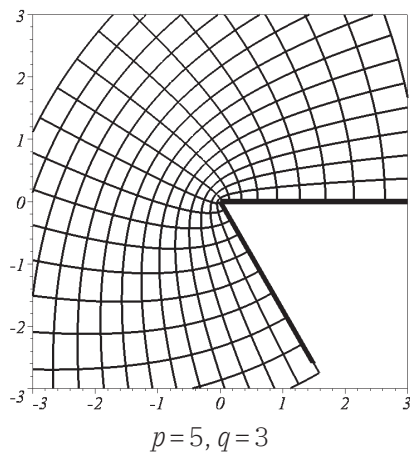
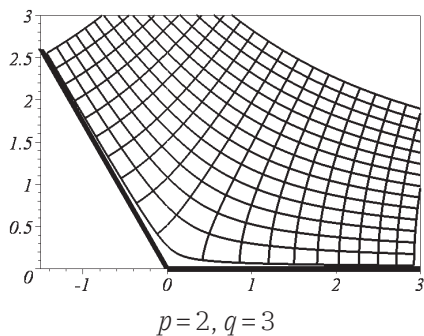
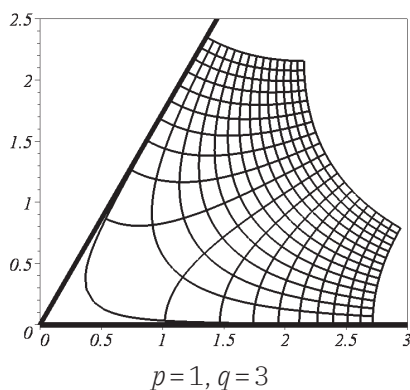
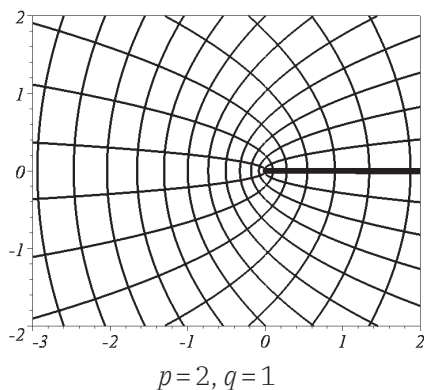


Рисунок 4.35 – Приклади відображень  $w = \sqrt[q]{z^p}$

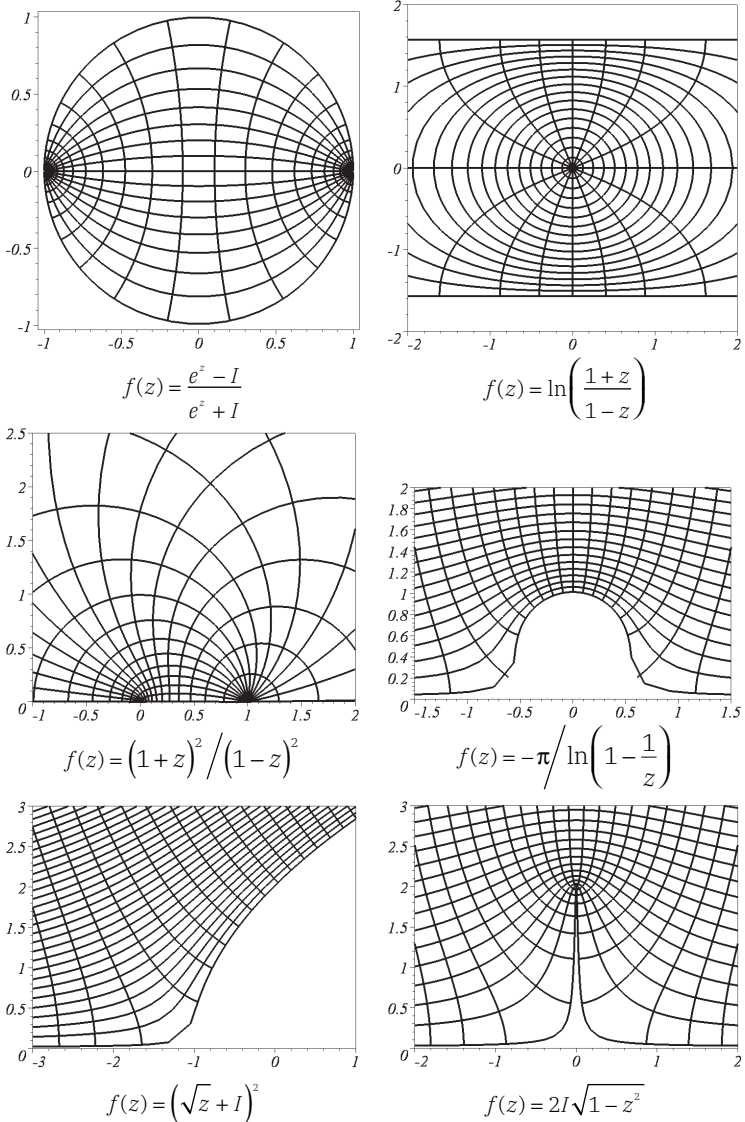


Рисунок 4.36 – Приклади відображень для різних функцій відображень

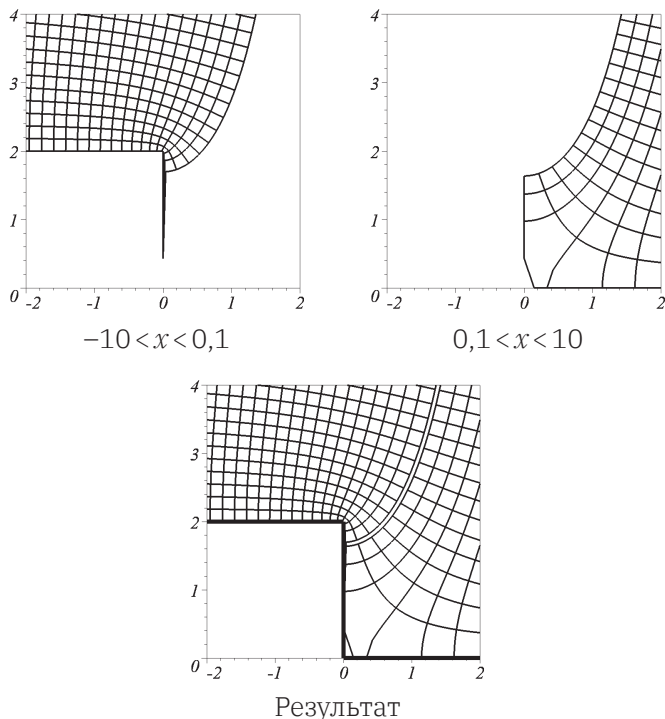


Рисунок 4.37 – Етапи відображення  $\text{Im } z > 0$  на "сходинок"

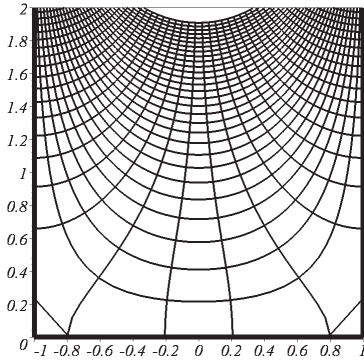
**Твердження 4.3.** Для відображення півплощини  $\text{Im } z > 0$  на "сходинок"  $\Omega = ((\psi \geq 2) \cup (\phi \geq 0)) \cap (\psi \geq 0)$  необхідно при  $x < 0$  застосовувати функцію:

$$w = \frac{2}{\pi}(-\sqrt{z^2 - 1} + \text{arch}(z)),$$

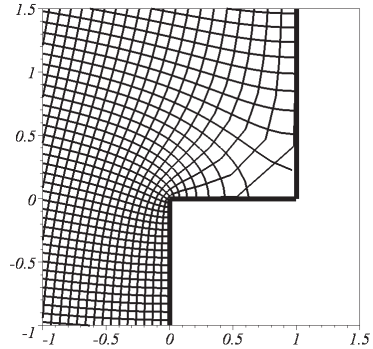
а при  $x > 0$  – функцію:

$$w = \frac{2}{\pi}(\sqrt{z^2 - 1} + \text{arch}(z)).$$

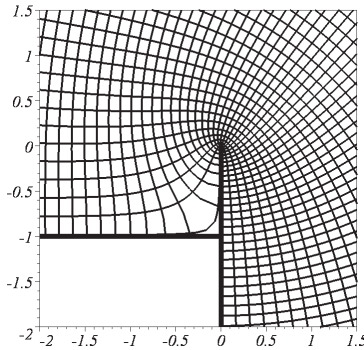
Різні варіанти відображень на ламані з елементами "сходинок" показано на рис. 4.38.



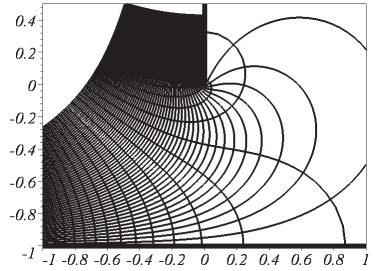
$$w = \frac{2}{\pi} \arcsin z$$



$$w = \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \sqrt{z} - \sqrt{z - z^2} \right)$$



$$w = -i \left( \frac{(z-3)\sqrt{z}}{2} + 1 \right)$$



$$w = i \left( \frac{z+1}{2\sqrt{z}} - 1 \right)$$

Рисунок 4.38 – Приклади відображень на ламану-"сходінку"

Ще один приклад можливого застосування методу побудови квазіпаралельних кривих теж базується на конформних відображеннях. Нехай на дійсній площині  $z$  на ортогональній сітці нанесено певне зображення (наприклад, зони різного кольору або відтінку). Якщо здійснити конформне відображення, то це інтерпретуватиметься як деформація зображення. На рис. 4.39 і 4.40 показано деформацію зображення, для якого використано (як інверсне

перетворення) перетворення типу  $w(z) = (z + 1/z)/2$ , де лінії перетворюються у дуги кіл залежно від свого розташунку.

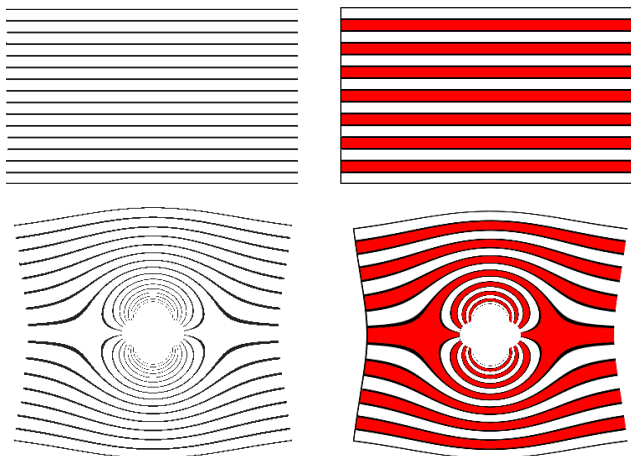


Рисунок 4.39 – Деформація зображення зі смугами

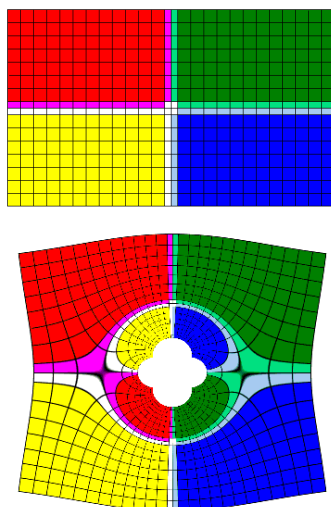


Рисунок 4.40 – Деформація зображення з кольоровими зонами

На основі цього прикладу визначаються такі властивості перетворення: більшість точок оригіналу відображується двома точками; в центрі утворюється отвір, обмежений чотирма півколами.

### **Контрольні запитання та вправи**

1. Що собою являють конформні сітки?
2. Назвати переваги використання регулярних розрахункових сіток.
3. Що таке гармонічна функція?
4. Пояснити поняття конформного відображення.
5. Визначити пряму і обернену задачі Крістоффеля – Шварца.
6. Пояснити сутність конформного відображення для побудови квазіпаралельних кривих для  $n$ -кутника.
7. Назвати елементи формальної постановки граничної задачі фільтрації під греблею.
8. Пояснити, як можна інтерпретувати сітки, отримані за допомогою методу конформних відображень.
9. Пояснити поняття аналітичних функцій, комплексних потенціалів і особливих точок.
10. Навести приклади схем фільтрації під греблею та відповідних картин ліній течії.
11. Назвіть кілька прикладів математичної аналогії опису стаціонарних полів різної фізичної природи.
12. Пояснити один з підходів конформного відображення на ламану.

## РОЗДІЛ 5. МЕТОД ІМІДЖЕВОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ

Серед процесів і явищ, які характеризуються наявністю фронту (границі розділу), є такі, що відбуваються в однорідних, ізотропних середовищах, і такі, що поширюються у неоднорідних та неізотропних середовищах. Властивості середовища мають істотний вплив на характер процесу або явища, і це приводить до зміни геометричної форми фронту (границі розділу) у просторі за часом. У зв'язку з цим є *дві проблеми*: визначення фронту (границі розділу) в проміжній фазі процесу та прогнозування геометричної форми фронту (границі розділу) тих фаз процесу, які виходять за межі інтервалу (просторового, часового), коли вже не існує можливості одержувати натурні (експериментальні) дані.

Проблема математичного моделювання динаміки поширення фронтів явищ та процесів, що розвиваються у просторі за часом (наприклад, поширення лісових пожеж, гетерогенні процеси в пластах нафтових і газових родовищ, хімічні гетерогенні реакції та ін.), полягає у побудові замкнутої системи (диференціальних) рівнянь, яка описує фізико-хімічну природу процесу або явища. При цьому головною вимогою до автоматизованої системи прогнозування форми фронту (поверхні розділу) є оперативне врахування фізико-хімічного стану для даного конкретного явища чи процесу на даний момент часу.

*Геометрична постановка задачі* полягає в описі сім'ї контурів як графічної інтерпретації розвитку у просторі за часом фронту поширення явища або процесу. Початковими даними є певна кількість вузлових зображень, кожне з яких відповідає конкретному моменту часу.

### **5.1. Сутність геометричного прогнозування фронтів явищ і процесів**

В системі автоматизованого визначення форми об'єктів, які розвиваються у просторі за часом слід забезпечити:

– можливість введення в систему  $N$  зображень роздільних кри-  
вих, що збігаються з вузловими фазами розвитку процесу;

- сегментацію кожного з  $N$  зображень, тобто одержання чіткого зображення роздільної кривої (контуру зображення);
- сегментацію контурів зображення, тобто виявлення системи вузлових точок на контурі та відрізків, що їх з'єднують;
- опис кожного з сегментованих контурів нормальним рівнянням;
- складання результуючого рівняння параметричної сім'ї за описами вузлових контурів, елементи яких збігалися б з проміжними зображеннями;
- відновлення геометричної форми як попередніх, так і майбутніх фаз роздільних кривих.

Для оперативної обробки візуальної інформації і здійснення прогнозу з допустимою похибкою щодо характеру поширення явища спрямований *геометричний метод*, який дозволяє описати та побудувати сім'ю квазіпаралельних ліній на площині на основі *іміджевої інтерполяції та екстраполяції*. Кожен з елементів сім'ї цих ліній є графічною інтерпретацією фронту явища у визначений момент часу. Побудова моделі на основі іміджевої екстраполяції включає три етапи.

*Першим етапом* є отримання зображень контурів (фронтів, ізоліній) у певні моменти часу. Для цього кожний контур вважають плоским, оскільки носієм зображення є площина.

*Другим етапом* є апроксимація контуру багатокутником. Приклад декількох апроксимованих контурів наведено на рис. 5.1.

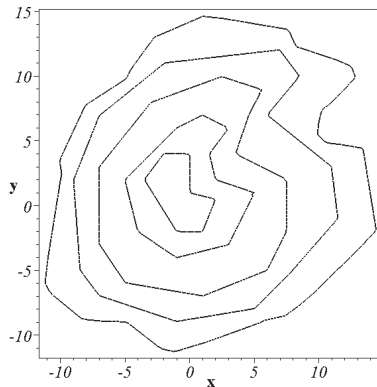


Рисунок 5.1 – Приклад контурів, які апроксимовано багатокутниками



*Третій етап* передбачає складання рівняння прямих, які утворюють грані багатокутника, та отримання єдиного рівняння з використанням алгоритму В. Л. Рвачова (на основі  $R$ -кон'юнкції та  $R$ -диз'юнкції). Для цього слід скласти логічну формулу. Наприклад, зображений на рис. 5.2 контур можна описати такою логічною формулою:  $F_1 \wedge (((F_2 \vee F_3) \wedge F_4) \vee F_5 \vee F_6 \vee (F_7 \wedge F_8 \wedge F_9)) \wedge F_{10} \wedge F_{11} \wedge F_{12} = 0$ .

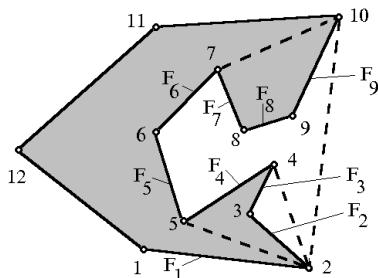


Рисунок 5.2 – Позначення на абстрактному контурі для запису його логічної формули

Визначення форми проміжних контурів або прогнозування форми майбутніх контурів здійснюється за допомогою, відповідно, інтерполяційних та екстраполяційних формул. Ці формули дозволяють відшукати значення функції в деяких точках у межах і за межами доступного інтервалу, в якому визначено цю функцію. Початкові значення функції задано у вузлових точках інтервалу.

## 5.2. Теоретичні основи імідажевої інтерполяції та екстраполяції

З'ясуємо, які можливості існують для визначення функцій усередині і за межами доступного інтервалу, щоб визначити поведінку цих функцій.

Дані, з якими доводиться мати справу на практиці, часто подаються у вигляді таблиць. Це пов'язано з тим, що їх звичайно визначають експериментально лише для дискретних значень аргументу.

Метод *інтерполяції* використовує алгоритм для відшукування (відновлення) значення функції *у деякій проміжній точці доступного інтервалу*, в якому визначено цю функцію. Вхідними даними є значення цієї функції у вузлових точках інтервалу.

Метод *екстраполяції* використовує алгоритм для відшукування (прогнозування) значення функції *в деякій точці за межами доступного інтервалу*, в якому визначено цю функцію. Вхідними даними є значення цієї функції у вузлових точках інтервалу.

### 5.2.1. Лінійна інтерполяція

Найпростішим видом інтерполяції є *лінійна інтерполяція*, в основі якої лежить апроксимація кривої на ділянці між точками  $(x_k, y_k)$  і  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  прямою, що проходить через ці точки. Тоді рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{y - y_k}{x - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}, \text{ або } y = \frac{y_k(x - x_{k+1}) - y_{k+1}(x - x_k)}{x_k - x_{k+1}}.$$

За допомогою останньої з наведених формул визначається значення функції *у* для будь-якого значення *x* як в інтервалі  $[x_k, x_{k+1}]$ , так і за його межами.

Результат розв'язання задачі інтерполяції можна уточнити шляхом використання більшого числа сусідніх точок і апроксимуючи дану криву більш складною лінією. Але цей шлях не веде до розв'язання задачі екстраполяції.

Традиційно інтерполяцію здійснюють за допомогою багаточлена *n*-го степеня  $P_n(x)$ , який апроксимує функцію  $f(x)$  кривою, що проходить через усі  $n + 1$  задані в таблиці точки  $(x_i, y_i)$ , де  $i = 0, 1, \dots, n$ . У цьому випадку говорять, що багаточлен задовольняє умови  $P_n(x) = y_i$  при  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Відшукування багаточлена  $P_n(x)$  поділяється на групи методів: Лагранжа, різницеві й ітераційні.

*Лагранжева (поліноміальна) інтерполяція* не придатна зовсім; тенденцію поведінки функції визначає велика кількість вузло-

вих точок; коли кількість вузлових точок мала, то доцільною є лінійна інтерполяція.

Поліноміальна інтерполяція не є прийнятною для визначення тенденції поведінки функції під час розв'язання задачі екстраполяції. Фахівець, що має спрогнозувати таку тенденцію, як правило, використовує свій особистий попередній досвід розв'язання даної конкретної задачі або інтуїцію. У такому разі на основі поліноміальної інтерполяції буде некоректною оцінка поведінки функції за межами доступного для спостережень інтервалу. Звичайно, в поодиноких випадках використання поліноміальної інтерполяції для розв'язання задачі екстраполяції може бути коректним, коли прогнозована тенденція є логічною.

### 5.2.2. Сплайн-інтерполяція

Для розв'язання задачі екстраполяції використання *сплайн-інтерполяції* є можливим за певними обмеженнями.

У перекладі слово "сплайн" означає "гнучка лінійка", яку деформують так, щоб по ній можна було провести криву через задані точки  $(x_i, y_i)$ . Будучи деформована таким чином, лінійка набуває форми, при якій запасена в ній пружна енергія є мінімальною. Використовуючи теорію згину бруса при малих деформаціях, можна строго показати, що сплайн – це група сполучених кубічних багаточленів, у місцях сполучення яких перша і друга похідні неперервні. Об'єднання таких функцій і називають *кубічними сплайнами*. Для побудови сплайну необхідно задати коефіцієнти, що єдиним чином визначають кубічний багаточлен у проміжку між заданими точками.

У найпростішому випадку необхідно задати всі кубічні функції  $q_1(x), q_2(x), \dots, q_m(x)$ . У найбільш загальному випадку ці багаточлени мають вигляд  $q_i(x) = k_{1i} + k_{2i}x + k_{3i}x^2 + k_{4i}x^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , де  $k_{ji}$  – константи, що залежать від зазначених вище умов.

Перші  $2m$  умов вимагають, щоб сплайни стикалися в заданих точках:  $q_i(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $q_{i+1}(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ .

Наступні  $2m-2$  умов вимагають, щоб у місцях стику сплайнів значення першої та другої похідних дорівнювали одна одній:  $q'_{i+1}(x_i) = q'_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ ,  $q''_{i+1}(x_i) = q''_i(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ .

Для того щоб система алгебраїчних рівнянь мала розв'язок, кількість рівнянь має точно дорівнювати числу невідомих членів. На даному етапі маємо  $4m$  невідомі члени і  $4m - 2$  рівнянь. Отже, необхідно знайти ще два рівняння. Звичайно як такі використовують рівняння  $q''_1(x_0) = 0$  і  $q''_m(x_m) = 0$ .

Визначений таким чином сплайн називають *звичайним кубічним сплайном*. Після обчислення коефіцієнтів сплайна можна використовувати цю кусково-гладку поліноміальну функцію для подання даних під час інтерполяції. Покажемо, що це буде можливим і для екстраполяції.

Визначення коефіцієнтів може не зводитись до розв'язання  $4m$  рівнянь з  $4m$  невідомими, оскільки шляхом вибору виду кубічних багаточленів цю задачу можна значно спростити. Так, коли окремі кубічні рівняння мають вигляд:

$$q_i(x) = ty_i + \bar{t}y_{i-1} + \Delta x_i[(k_{i-1} - d_i)t\bar{t}^2 - (k_i - d_i)t^2\bar{t}], \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.1)$$

де

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad t = \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_i}, \quad \bar{t} = 1 - t, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = d_i,$$

то кожне з рівнянь  $q_i(x)$  містить тільки два невідомих коефіцієнти. Після того як перше рівняння  $q_i(x)$  записано, з кожним наступним рівнянням додається тільки один новий невідомий коефіцієнт. При  $x = x_{i-1}$ :  $t = 0, \bar{t} = 1$ ; при  $x = x_i$ :  $\bar{t} = 0, t = 1$ . Для такого вибору кубічних багаточленів автоматично задовольняються всі умови, крім умов, що накладаються на другі похідні. Для внутрішніх точок виконується співвідношення:

$$k_{i-1}\Delta x_{i+1} + 2k_i(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) + k_{i+1}\Delta x_i = 3(d_i\Delta x_{i+1} + d_{i+1}\Delta x_i), \quad (5.2)$$

а для двох зовнішніх – співвідношення:

$$2k_0 + k_1 = 3d_1, \quad k_{m-1} + 2k_m = 3d_m. \quad (5.3)$$

Таким чином, система рівнянь, що розв'язується, є лінійною, а її матриця є тридіагональною:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_1 & \\ & \Delta x_3 & 2(\Delta x_2 + \Delta x_3) & \Delta x_2 \\ 0 & & & \\ & & \Delta x_m & 2(\Delta x_{m-1} + \Delta x_m) \Delta x_{m-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_m \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} d_1 \\ d_1 \Delta x_2 + d_2 \Delta x_1 \\ d_2 \Delta x_3 + d_3 \Delta x_2 \\ \dots \\ d_{m-1} \Delta x_m + d_m \Delta x_{m-1} \\ d_m \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

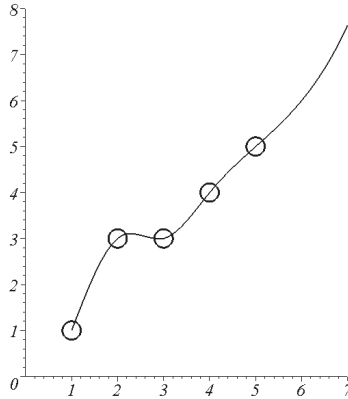
У системі рівнянь (5.4) кількість обумовлених коефіцієнтів дорівнює кількості заданих точок, тому розв'язок виявляється не складнішим, ніж у випадку апроксимації  $m + 1$  точок багаточленом  $m$ -го степеня.

Кубічний сплайн апроксимує функцію краще, ніж багаточлен степеня  $m$ .

Екстраполяційні властивості сплайн-інтерполяції демонструють приклади нижче. Розглянемо приклад опису для п'яти точок.

**Приклад 5.1.** Нехай у п'яти точках  $x = 1; 2; 3; 4; 5$  задано, відповідно, п'ять значень функції  $y = 1; 3; 3; 4; 5$ . Необхідно за допомогою сплайнів спрогнозувати поведінку функції за межами доступного інтервалу  $[1...5]$ , наприклад, обчислити значення функції для точки  $x = 6$ .

Якщо використати (рис. 5.3) кусково-кубічний сплайн третього порядку, то одержується екстрапольоване значення функції  $y = 5,9956$ . Такий результат для впроваджень є значно кращим порівняно з екстраполяцією на основі поліноміальної інтерполяції. Іншими словами, тут опис сплайнами "узгоджується" з суб'єктивною оцінкою фахівцем поведінки функції за межами доступного для спостереження інтервалу.



$$y := \begin{cases} -1. + .7857x + 1.821x^2 - .6071x^3 & x < 2. \\ -14.14 + 20.50x - 8.036x^2 + 1.036x^3 & x < 3. \\ 28.29 - 21.93x + 6.107x^2 - .5357x^3 & x < 4. \\ -12.86 + 8.929x - 1.607x^2 + .1071x^3 & \text{кругом.} \end{cases}$$

Рисунок 5.3 – Сплайн як локальний поліном третього степеня

**Приклад 5.2.** Нехай в  $N$  точках  $\{x_k\}$ , розташованих з рівномірним кроком, маємо відповідні значення функції  $\{y_k\}$ . Якщо для визначення екстрапольованих значень  $y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, \dots$  у точках  $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots$  використовувати, відповідно,  $k, k+1, k+2, \dots$  значень функції (включаючи й екстрапольовані значення), то таку схему екстраполяції назвемо методом "нарощування" вузлових точок. Коли ж для знаходження екстрапольованих значень  $y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, \dots$  у точках  $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots$  використовувати лише  $k$  останніх значень функції (включаючи й екстрапольовані значення), то таку схему екстраполяції назвемо методом "переносу" вузлових точок.

Під час реалізації на практиці екстраполяції методами "нарощування" або "переносу" вузлових точок завжди одержується лінійна залежність не пізніше, ніж на четвертому кроці.

Для екстраполяції методом "нарощування" необхідно задати кількість точок  $N$  та їх координати.

Виконання програми надає анімаційну послідовність кадрів "динаміки" процесу екстраполяції (рис. 5.4). Наочно видно, що

починаючи з четвертого кроку, екстрапольовані точки розташуються на одній прямій.

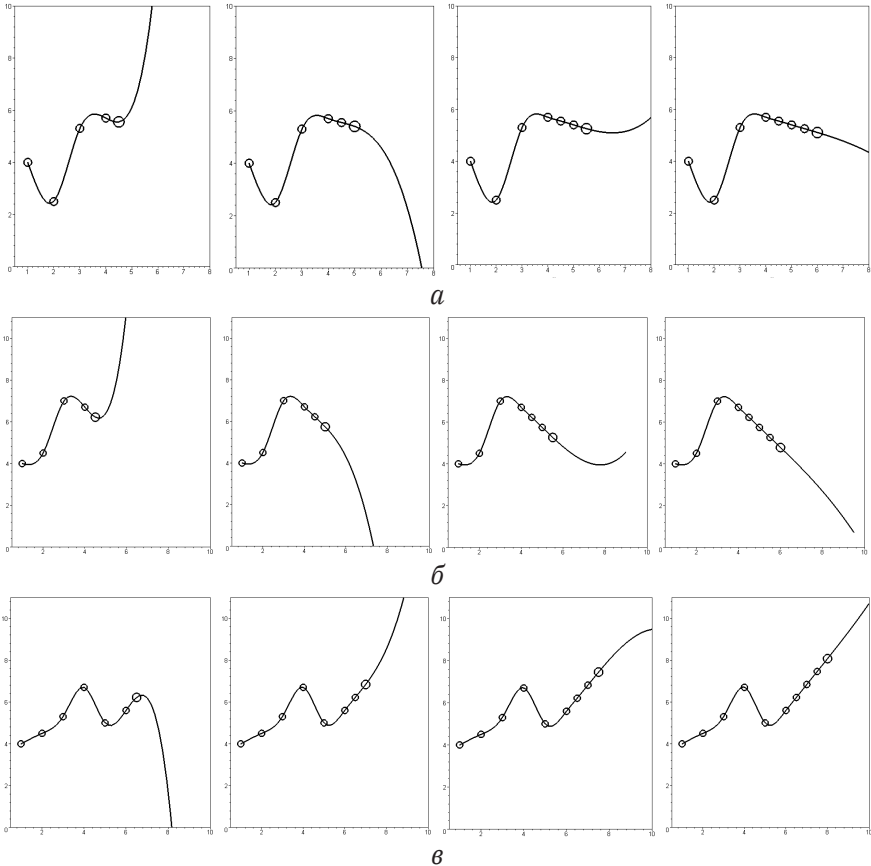


Рисунок 5.4 – Варіанти екстраполяції методом "нарощування" кількості точок

Виконання програми для екстраполяції методом "переносу" точок надає послідовність кадрів екстраполяції (рис. 5.5). Тут також, починаючи з четвертого кроку, екстрапольовані точки "розташуються" на одній прямій.

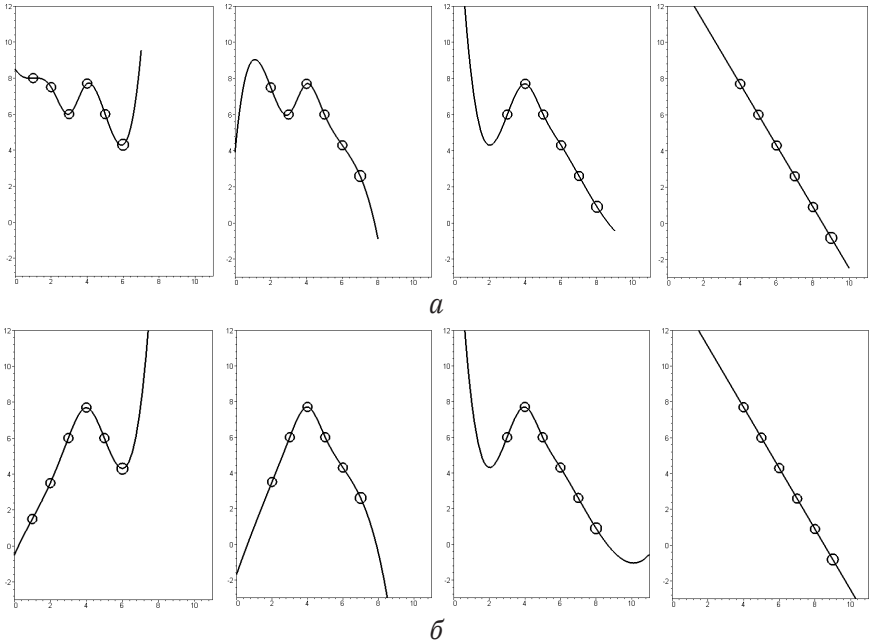


Рисунок 5.5 – Варіанти екстраполяції методом "переносу" точок

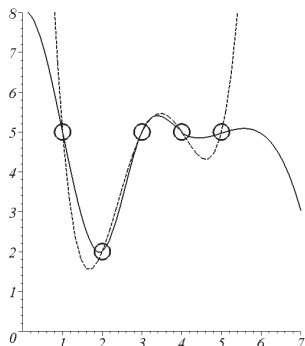
**Приклад 5.3.** Здійснити порівняння графіків функцій, що є описами поліноміальної та сплайнової (кубічної) інтерполяції залежно від розташунку п'яти вузлових точок.

За межами доступного інтервалу  $[1...5]$  зміни аргументу, як демонструє рис. 5.6, спостерігаються певні переваги екстраполяції на основі сплайн-інтерполяції. Суцільною лінією тут показано результат сплайн-інтерполяції, а штриховою – результат поліноміальної інтерполяції.

У загальному випадку сплайн-інтерполяція не завжди дає коректний опис закону зміни функції за межами доступного інтервалу.

Це підтверджує приклад на рис. 5.7 (тут суцільна лінія – результат сплайн-інтерполяції, штрихова лінія – результат поліноміальної інтерполяції).

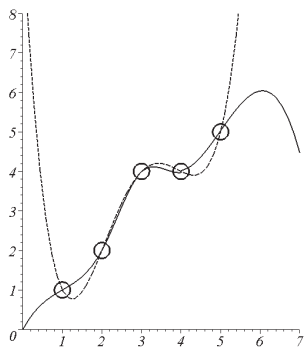




$$yp := .5000x^4 - 6.500x^3 + 29.50x^2 - 53.50x + 35.$$

$$ys := \begin{cases} 8. + .6429x - 5.464x^2 + 1.821x^3 & x < 2. \\ 47.43 - 58.50x + 24.11x^2 - 3.107x^3 & x < 3. \\ -79.86 + 68.79x - 18.32x^2 + 1.607x^3 & x < 4. \\ 43.57 - 23.79x + 4.821x^2 - .3214x^3 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Рисунок 5.6 – Порівняння поліноміальної та сплайн-інтерполяції



$$yp := .2500x^4 - 3. x^3 + 12.25x^2 - 18.50x + 10.$$

$$ys := \begin{cases} 1.857x - 1.286x^2 + .4286x^3 & x < 2. \\ 12.57 - 17. x + 8.143x^3 - 1.143x^3 & x < 3. \\ -49.14 + 44.71x - 12.43x^2 + 1.143x^3 & x < 4. \\ 51.43 - 30.71x + 6.429x^2 - .4286x^3 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Рисунок 5.7 – Некоректний результат використання сплайн-інтерполяції

*Можливості використання сплайн-інтерполяції для екстраполяції:*

– використання сплайн-інтерполяції коректно визначає тенденцію поведінки функції у найближчій точці за межами доступного інтервалу, тобто крок екстраполяції має бути порівнянним з кроком інтерполяції;

– сплайн-інтерполяцію не слід застосовувати для екстраполяції осцилюючих процесів;

– для збільшення інтервалу прогнозування тенденції поведінки функції за межами доступного інтервалу необхідно задавати якомога більшу кількість точок у доступному інтервалі інтерполяції. Це означає, що якщо необхідно одержати значення функції в точці, суттєво віддаленій від меж доступного інтервалу, слід це зробити не за один крок екстраполяції, а за більшу кількість кроків, яка визначається розміром кроку в інтервалі інтерполяції.

### 5.2.3. Іміджева інтерполяція

Назва методу *іміджевої* інтерполяції походить від "image" – "зображення", "образ". В інтерполяційній схемі числової екстраполяції функції замінюються вузлові значення функції на вузлові зображення контурів – графічних моделей фронтів процесу на різних фазах його розвитку. Тут значення функції (зображення контуру) визначається для аргументу  $t$ , який є параметром часу.

Задачі геометричного моделювання границь розділу фаз мають такий зміст: *перша задача* полягає у відновленні проміжних зображень контурів (сім'ї ліній розділу) у задані моменти часу в межах доступного для спостережень часового інтервалу; *друга задача* полягає у прогнозуванні геометричної форми контурів у задані моменти часу за межами доступного часового інтервалу.

Третім етапом алгоритму побудови моделі на основі іміджевої інтерполяції та екстраполяції є опис кожного з вузлових контурів у аналітичному вигляді за допомогою *нормального рівняння*. Таке рівняння подається *в неявній формі*  $F(x, y) = 0$ . Інакше кажучи, *значення функції у вузлових точках доступного часового інтервалу подано в аналітичному вигляді*. Для пояснення нижче наведено тривіальний приклад *лінійної іміджевої екстраполяції*.

Формула для лінійної інтерполяції має вигляд:

$$F(x, y, t) = \frac{1}{t_1 - t_2} \begin{vmatrix} f_1(x, y) & f_2(x, y) \\ t - t_1 & t - t_2 \end{vmatrix}. \quad (5.5)$$

Тут виконуються тотожності  $F(x, y, t_1) = f_1(x, y)$  і  $F(x, y, t_2) = f_2(x, y)$ , тому формулу (5.5) можна використовувати і для лінійної іміджевої інтерполяції.

Нижче наведено кілька прикладів.

**Приклад 5.4.** Нехай задано два вузлові контури, що є фронтами деякого процесу, в умовні моменти часу  $t_1 = 1$  і  $t_2 = 2$ . Перший контур – квадрат, другий контур – коло. Геометрична форма змінюється від квадрата до кола і далі за межі цього інтервалу. Контури описано рівняннями:

$$f_1(x, y) \equiv 2 - |x - y| - |x + y| = 0; \quad f_2(x, y) \equiv 4 - x^2 - y^2 = 0. \quad (5.6)$$

Необхідно визначити проміжні контури для  $1 < t < 2$  і спрогнозувати геометричну форму контурів для  $t > 2$ .

Використано поліноміальну іміджеву екстраполяцію.

Результатом виконання програми є опис сім'ї кривих – інтерпольованих та екстрапольованих. Дійсно, на основі інтерполяційної формули (5.5) одержується рівняння:

$$\left( |x - y| + |x + y| - x^2 - y^2 + 2 \right) t + x^2 + y^2 - 2|x - y| - 2|x + y| = 0, \quad (5.7)$$

де параметр  $t$  змінюється в межах  $1 \leq t \leq 2$ . На рис. 5.8 зображено сім'ю кривих, що описані рівнянням (5.7) для деякої кількості фіксованих значень  $t$  і що є проміжними в інтервалі між квадратом і колом (5.6).

Формулу (5.7) при  $t > 2$  можна також використати як опис екстрапольованих кривих для "вузлових" зображень квадрата і кола. Наприклад, при  $t = 3$  маємо рівняння екстрапольованої кривої у вигляді:

$$|x - y| + |x + y| - 2x^2 - 2y^2 + 6 = 0. \quad (5.8)$$

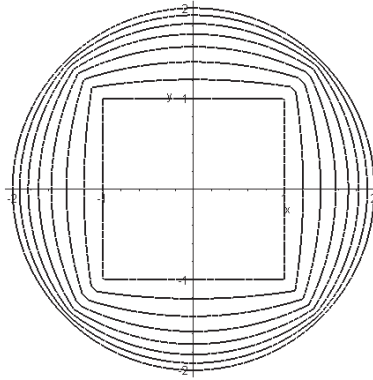


Рисунок 5.8 – Сім'я інтерпольованих кривих

На рис. 5.9 наведено зображення сім'ї екстрапольованих кривих, з яких зовнішню криву описано рівнянням (5.8). Якщо порівняти рис. 5.8 і рис. 5.9, то бачимо, що "відстань" між елементами сім'ї зменшується залежно від збільшення параметра  $t$ . Це є недоліком "прямого" використання відомої інтерполяційної формули (5.5).

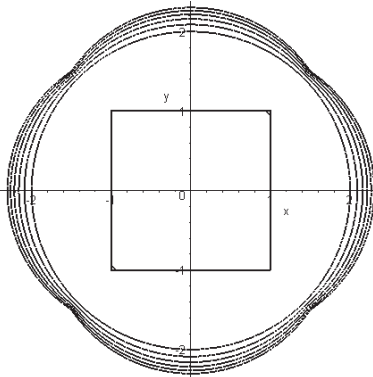


Рисунок 5.9 – Сім'я екстрапольованих кривих

Опис вузлових зображень за допомогою нормальних рівнянь такого недоліку не має.

### 5.2.4. Опис вузлових зображень за допомогою нормальних рівнянь

**Приклад 5.5.** Розв'яжемо задачу інтерполяції та екстраполяції, умови якої надано в прикладі 5.2, тільки рівняння (5.6) замінімо на рівняння:

$$f_1(x, y) \equiv (2 - |x - y| - |x + y|) / 2 = 0; \quad f_2(x, y) \equiv 2 - \sqrt{x^2 + y^2} = 0. \quad (5.9)$$

Тоді для опису проміжних кривих буде рівняння:

$$\left( 1 - \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{|x - y| + |x + y|}{2} \right) t - |x - y| - |x + y| + \sqrt{x^2 + y^2} = 0. \quad (5.10)$$

Звідси для  $t = 3$  маємо рівняння екстрапольованої кривої:

$$\frac{|x - y| + |x + y|}{2} - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 3 = 0. \quad (5.11)$$

Сім'ї інтерпольованих та екстрапольованих кривих, з яких зовнішню криву описано рівнянням (5.11), наведено, відповідно, на рис. 5.10 і 5.11.

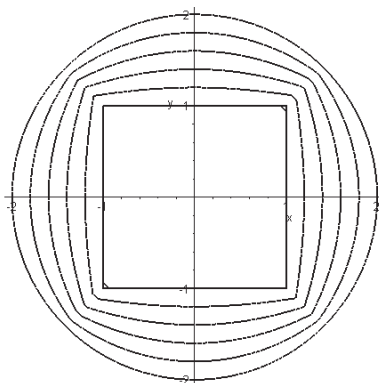


Рисунок 5.10 – Сім'я інтерпольованих квазіпаралельних кривих

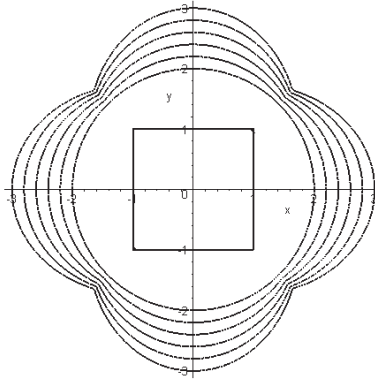


Рисунок 5.11 – Сім'я екстрапольованих квазіпаралельних кривих

*Сутність використання нормальних рівнянь* полягає в такому. В тривимірному просторі  $Oxyz$  формула іміджевої інтерполяції (5.10) є рівнянням поверхні  $W$ , нормальні перетини якої площинами  $t=1$  і  $t=2$  матимуть вигляд, відповідно, квадрата та кола. Причому опис цих кривих у вигляді (5.9) приводить до того, що довільна площина, дотична до поверхні  $W$ , буде нахилена до площини  $Oxy$  під кутом  $45^\circ$  (таку поверхню називають поверхнею однакового нахилу). Це означає, що проєкції сім'ї перетинів поверхні  $W$  площинами рівня  $t = \text{const}$ , розташованими на однакових відстанях одна від одної, будуть квазіпаралельними.

На рис. 5.12 наведено результат виконання програми – зображення поверхні однакового нахилу  $W$ .

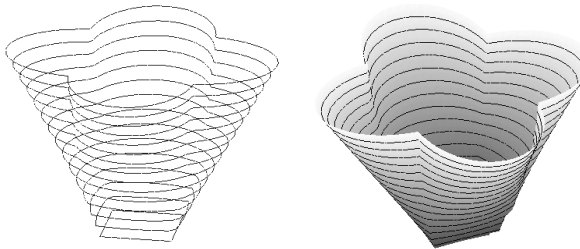


Рисунок 5.12 – Різні ракурси поверхні однакового нахилу до прикладу 5.3

**Приклад 5.6.** Зробимо порівняння результатів розв'язання задач іміджевої інтерполяції й екстраполяції на базі лінійної поліноміальної та сплайн-інтерполяції. Нехай рівняння вузлових контурів мають вигляд:

- ромба  $-f_1(x, y) = 0,4 - |x| - |y|$ ;
- кола  $-f_2(x, y) = 0,5 - x^2 - y^2$ ;
- квадрата  $-f_3(x, y) = 2 - |x - y| - |x + y|$ .

Для опису інтерпольованих та екстрапольованих кривих використаємо триточкову Лагранжеву інтерполяційну формулу і формули кубічної сплайн-інтерполяції.

Рівняння "тривузлового" інтерполяційного полінома має вигляд:

$$\begin{aligned} pol := & (x^2 + 0,7 - 0,5|x - y| - 0,5|x| - 0,5|y| + y^2 - 0,5|x + y|)t^2 + \\ & + (-2 + 1,5|x + y| + 2,5|y| - 4y^2 + 1,5|x - y| + 2,5|x| - 4x^2)t + \\ & + 1,7 - 3|y| - 3|x| - |x - y| + 3x^2 + 3y^2 - |x + y|. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Рівняння інтерполяційного сплайна записано так:

$$\begin{aligned} spl := & \{x^2 - 2|x| + 0,3 + y^2 - 2|y| + (0,5|x| - 0,5|x - y| + 0,8 + \\ & + 0,5|y| - 0,5|x + y|)t + (-1,5x^2 + 0,75|x| + 0,75|x - y| - \\ & - 1,05 - 1,5y^2 + 0,75|y| + 0,75|x + y|)t^2 + (0,5x^2 - 0,25|x| - \\ & - 0,25|x - y| + 0,35 + 0,5y^2 - 0,25|y| - 0,25|x + y|)t^3, \quad t < 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 9x^2 - 6|x| - 4|x - y| + 5,9 + 9y^2 - 6|y| - 4|x + y| + \\ & + (-12x^2 + 6,5|x| + 5,5|x - y| - 7,6 - 12y^2 + 6,5|y| + \\ & + 5,5|x + y|)t + (4,5x^2 - 2,25|x| - 2,25|x - y| + 3,15 + \\ & + 4,5y^2 - 2,25|y| - 2,25|x + y|)t^2 + (-0,5x^2 + 0,25|x| + \\ & + 0,25|x - y| - 0,35 - 0,5y^2 + 0,25|y| + \\ & + 0,25|x + y|)t^3, \text{ otherwise.} \end{aligned} \quad (5.13)$$

На рис. 5.13 наведено зображення екстрапольованих кривих, побудованих за допомогою формул (5.12) і (5.13). За зображеннями видно переваги сплайн-екстраполяції.

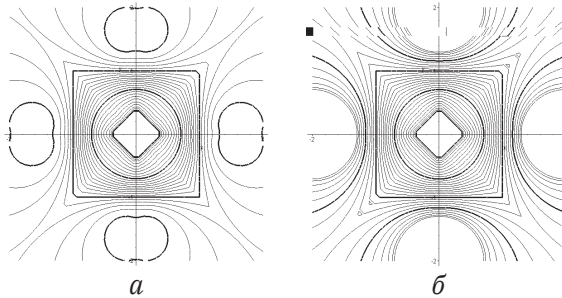


Рисунок 5.13 – Результати "трилінійної" екстраполяції з вузловими елементами "ромб – коло – квадрат": *a* – поліноміальна екстраполяція; *б* – сплайн-екстраполяція

### 5.2.5. Іміджева екстраполяція на основі поліноміальної інтерполяції

Продемонструємо до чого зводиться іміджева екстраполяція, якщо її будувати на основі поліноміальної інтерполяції, тобто проаналізуємо можливості іміджевої поліноміальної екстраполяції.

Нехай на площині в декартовій системі координат  $Oxy$  рівняннями  $\{F_i(x, y) = 0\}$  ( $i = 1 \dots N$ ) в умовні моменти часу  $\{t = t_i\}$  задано послідовність "концентричних" ліній, які не перетинають одна одну. Інакше кажучи, нехай для послідовності множин  $\{G_i; F_i(x, y) \geq 0\}$  виконуються співвідношення  $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_{N-1} \subset G_N$ . Оберемо момент часу  $t = t_{N+1}$  за межами доступного інтервалу  $[t_1 \dots t_N]$ , тобто  $t_N < t_{N+1}$ , причому  $t_{N+1} - t_N \leq \max(t_{i+1} - t_i)$ , де  $i = 1 \dots N$ .

Рівняння сім'ї екстрапольованих ліній має вигляд:

$$\Phi_N(x, y) \equiv \sum_{i=1}^N F_i(x, y) \frac{L_i(t)}{L_i(t_i)} = 0, \quad (5.14)$$

де  $L_i(t) = (t - t_1) \dots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1}) \dots (t - t_N)$ .



Рівняння екстрапольованої для моменту часу  $t = t_{N+1}$  лінії має вигляд:

$$\Phi_N(x, y) \equiv \sum_{i=1}^N F_i(x, y) \frac{L_i(t_{N+1})}{L_i(t_i)} = 0, \quad (5.15)$$

де  $L_i(t) = (t - t_1) \dots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1}) \dots (t - t_N)$ .

Найпростішим видом формули (5.14) є *лінійна іміджева екстраполяція*, в основі якої лежить апроксимація кривої на ділянці між точками  $(t_k, t_k)$  і  $(t_{k+1}, t_{k+1})$  тією прямою, що проходить через ці точки.

Як результат маємо опис сім'ї екстрапольованих ліній за вузловими лініями  $F_k(x, y) = 0$  і  $F_{k+1}(x, y) = 0$  в моменти часу  $t = t_k$  і  $t = t_{k+1}$ :

$$\Phi(x, y) \equiv \frac{F_k(x, y)(t - t_{k+1}) - F_{k+1}(x, y)(t - t_k)}{t_k - t_{k+1}} = 0. \quad (5.16)$$

Отже, за допомогою формули (5.16) можна знайти опис лінії для будь-якого значення  $t$  як в інтервалі  $[t_k, t_{k+1}]$ , так і за його межами.

Конкретно при  $t = t_{k+2}$  з (5.16) одержуємо опис екстрапольованої лінії:

$$\Phi_{k+2}(x, y) \equiv \frac{F_k(x, y)(t_{k+2} - t_{k+1}) - F_{k+1}(x, y)(t_{k+2} - t_k)}{t_k - t_{k+1}} = 0. \quad (5.17)$$

Якщо інтервал розбито з однаковим кроком  $\Delta = t_{k+1} - t_k = t_{k+2} - t_{k+1}$ , з (5.17) маємо опис екстрапольованої кривої:

$$\Phi(x, y) \equiv 2F_{k+1}(x, y) - F_k(x, y) = 0.$$

При  $N = 3$  з виразу (5.14) можна одержати "трилінійну" екстраполяційну формулу для трьох точок  $t = t_1$ ;  $t = t_2$ ;  $t = t_3$  і для трьох ліній, описаних відповідними рівняннями  $F_1(x, y) = 0$ ,  $F_2(x, y) = 0$ ,  $F_3(x, y) = 0$ .

Трилінійне рівняння екстрапольованої лінії для моменту часу  $t = t_4$ , за умови рівномірного розбиття інтервалу, має вигляд:

$$\Phi(x, y) \equiv \frac{(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} F_1(x, y) + \frac{(t_4 - t_1)(t_4 - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} F_2(x, y) + \frac{(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} F_3(x, y) = 0. \quad (5.18)$$

Наприклад, для точок з координатами  $t_1 = 1$ ;  $t_2 = 2$ ;  $t_3 = 3$ ;  $t_4 = 4$  маємо вираз:

$$\Phi(x, y) \equiv F_1(x, y) - 3F_2(x, y) + 3F_3(x, y) = 0. \quad (5.19)$$

Таким чином, під час складання алгоритму екстраполяції на основі поліноміальної інтерполяції та сплайн-інтерполяції не враховується ступінь впливу окремих вузлових елементів на характер зміни геометричної форми екстрапольованої кривої. А метод векторної іміджевої екстраполяції це забезпечує.

### 5.3. Векторна іміджева екстраполяція

Для того щоб знайти значення функції в деякій точці за межами доступного інтервалу визначення цієї функції, необхідно мати значення функції у вузлових точках інтервалу, тобто множину точок, в яких функція набуває нульового значення. До того ж потрібно, щоб екстрапольована точка була розташована від доступного інтервалу на відстані не більше, ніж розмір максимального кроку дискретизації цього інтервалу.

У підрозділі 5.2 показано традиційне розв'язання задачі екстраполяції за допомогою формул інтерполяції Лагранжа і сплайн-інтерполяції. Поліноміальна структура цих формул спричинює певні недоліки, чого немає при побудові формул "поточкової" екстраполяції на векторній основі.

*Формулювання задачі.* Нехай у точках  $x_i$  задано відповідні значення функції  $y_i$  ( $i = 1 \dots N$ ). Необхідно знайти значення функції  $y_{N+1}$  у точці  $x_{N+1}$ , розташованій за межами інтервалу  $[x_1 \dots x_N]$ .

Для визначення функції за межами доступного інтервалу  $[x_1 \dots x_N]$  за послідовністю векторів  $q_i$ , що сполучають точки з координата-

ми  $(x_i, y_i)$  та  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , де  $i=1 \dots N-1$  (рис. 5.14), обчислюється результуючий вектор як сума:

$$q_N = \sum_{i=1}^{N-1} c_i q_i,$$

де  $c_i$  – вагові коефіцієнти, що вказують "вагу" впливу на екстраполяційний процес попередніх варіацій значень функції.

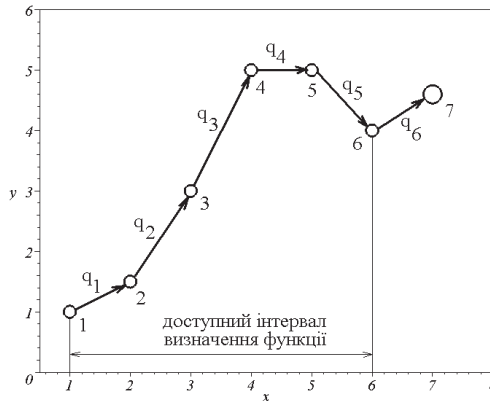


Рисунок 5.14 – Схема побудови послідовності векторів

Координати вектора  $q_N$  дозволяють скласти рівняння відрізка, що сполучає точки з координатами  $\{(x_N, y_N), (x_{N+1}, y_{N+1})\}$ ; звідси маємо вираз для обчислення значення  $y_{N+1}$  даної функції в точці  $x_{N+1}$ :

$$y_{N+1} = y_N + (x_{N+1} - x_N) \frac{\sum_{i=1}^{N-1} c_i (y_{i+1} - y_i)}{\sum_{i=1}^{N-1} c_i (x_{i+1} - x_i)}. \quad (5.20)$$

Залежно від значень  $c_i$  ( $i=1 \dots N-1$ ) одержуються різновиди екстраполяцій. Коли необхідно, щоб при формуванні значення  $y_{N+1}$  на цей процес *впливали однаково* всі попередні варіації значень  $y_i$ , то необхідно обрати  $c_i=1$ . Якщо потрібно *перевагу* віддати варіаціям

значень функції з *правої частини інтервалу*  $[x_1...x_N]$ , то як  $c_i$  слід обрати зростаючу функцію, наприклад степеневу  $c_i = i^k$  (де  $k$  – ціле додатне число). Коли треба, щоб *переважали* варіації значень функції з *лівої частини інтервалу*  $[x_1...x_N]$ , то як  $c_i$  обирають спадну функцію, наприклад також степеневу  $c_i = i^k$  (де  $k$  – ціле від'ємне число). Тобто значення показника степеня  $k$  обрано за *регулюючий параметр екстраполяції*.

**Приклад 5.7.** Нехай задано шість точок деякої функції, з яких п'ять точок розташовано за лінійним законом, а шоста (остання) точка імітує "викид".

В результаті виконання програми для реалізації векторної екстраполяції визначаються варіанти розташунок сьомої точки залежно від значення  $k$  (рис. 5.15). Розташунок сьомої точки вказує на тенденцію поведінки функції за межами доступного інтервалу  $[1...6]$ .

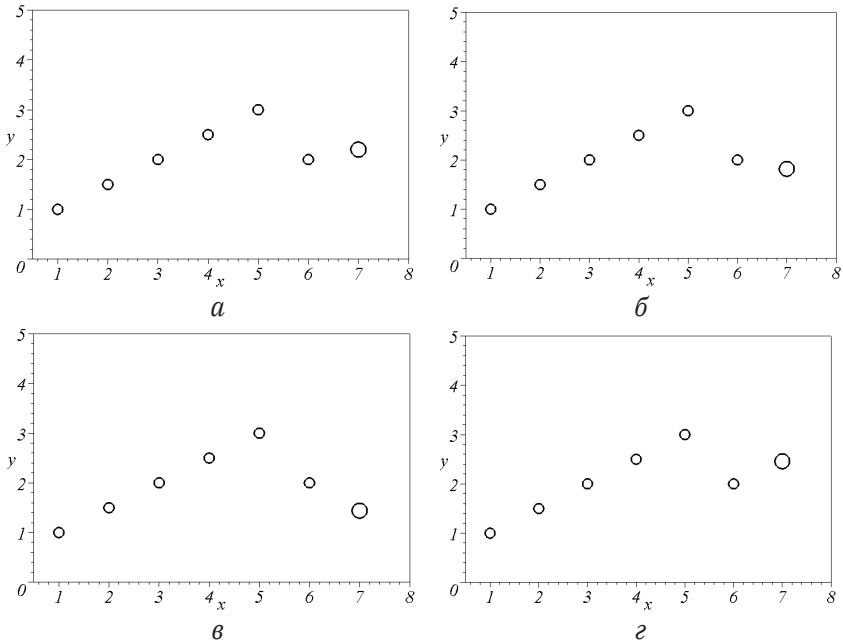


Рисунок 5.15 – Приклади екстраполяції "лінійної" функції:  
 $a - k=0$ ;  $б - k=2$ ;  $в - k=5$ ;  $г - k=-2$

На рис. 5.15, *a* зображено випадок, коли варіації всіх заданих шістьох точок однаково впливають на розташунок сьомої точки. Якщо ж переважають варіації точок правої частини інтервалу (де маємо "зрив" лінійності), то одержуємо зображення на рис. 5.15, *б-в*. На рис. 5.15, *г* показано випадок, коли переважає вплив варіації точок з лівої частини інтервалу.

**Приклад 5.8.** Нехай задано шість точок деякої функції, з яких п'ять точок розташовано за "параболічним" законом, а шоста (остання) точка нехай знову імітує "викид". У результаті екстраполяції за формулою (5.20) одержимо варіанти розташунок сьомої точки залежно від значення  $k$  (рис. 5.16).

За допомогою формули (5.14) здійснюється екстраполяція нелінійної функції з урахуванням ступеня впливу на кінцевий результат варіацій.

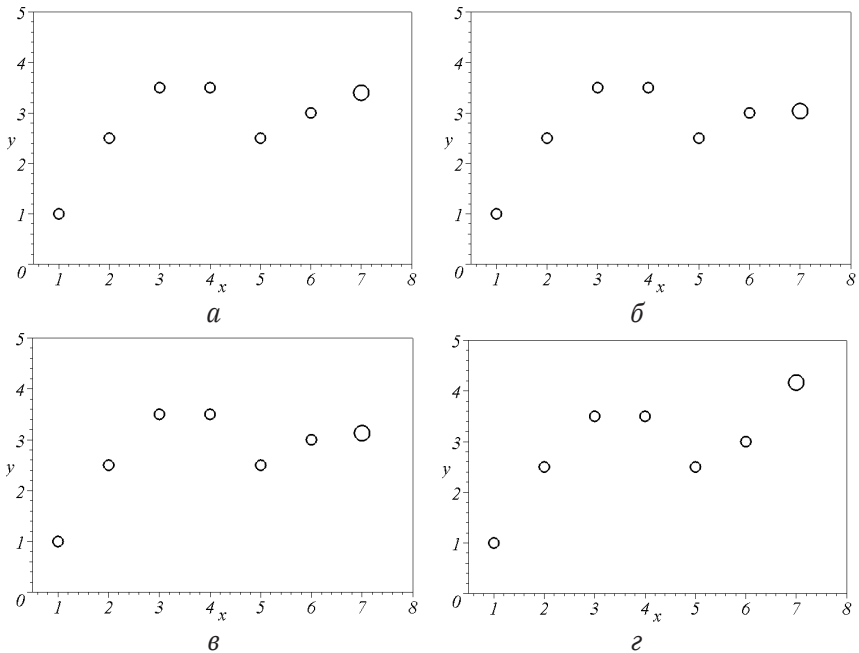


Рисунок 5.16 – Приклади екстраполяції "параболічної" функції:  
 $a - k = 0$ ;  $б - k = 2$ ;  $в - k = 5$ ;  $г - k = -2$

*Задача застосування векторної екстраполяції.* Для визначення квазіпаралельних кривих за межами доступного часового інтервалу використаємо формули (5.14).

Замість заданих  $N$  точок деякої функції виступатимуть  $N$  послідовних зображень контурів, що інтерпретуються як фронти деякого процесу або ізолінії зміни розподілу його параметрів. Прикладами такого процесу є, наприклад, "горіння" фігури на площині, "підпаленої" по контуру, або ізолінії карт розподілу концентрацій, тисків та інших параметрів у нафтогазових покладах тощо.

Необхідно спрогнозувати зображення  $(N+1)$ -го контуру, яке б логічно випливало з даної послідовності  $N$  зображень попередніх контурів. При цьому вважається, що вузловими елементами є зображення, описані рівняннями у неявному вигляді і що на результат екстраполяції можна впливати за допомогою спеціального параметра  $k$ .

**Твердження 5.1.** Нехай маємо  $N$  рівнянь  $\{F_i(x, y) = 0\}$ , які є описом послідовності вузлових контурів у моменти часу  $t = t_i$ . Тоді екстрапольовану криву в момент часу  $t = t_N$  можна описати рівнянням:

$$F_{N+1}(x, y) \equiv F_N(x, y) + (t_{N+1} - t_N) \frac{\sum_{i=1}^{N-1} i^k (F_{i+1}(x, y) - F_i(x, y))}{\sum_{i=1}^{N-1} i^k (t_{i+1} - t_i)} = 0, \quad (5.21)$$

де  $k$  – регулюючий параметр екстраполяції.

**Приклад 5.9.** Нехай маємо чотири абстрактні вузлові контури (наприклад, коло і три квадрати), які в умовні моменти часу  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$  і  $t_4 = 4$  описано рівняннями:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &\equiv 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 0; \\ F_2(x, y) &\equiv (3 - |x - y| - |x + y|) / 4 = 0; \\ F_3(x, y) &\equiv (4 - |x - y| - |x + y|) / 4 = 0; \\ F_4(x, y) &\equiv (5 - |x - y| - |x + y|) / 4 = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

У результаті виконання програми імідажевої екстраполяції маємо рівняння екстрапольованої кривої на момент часу  $t_5 = 5$ :

$$F_5(x, y) \equiv \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(|x - y| + |x + y|) + \frac{\frac{1}{2}(1 - |x - y| - |x + y| + 2^k + 3^k) + \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + 2^k + 3^k} = 0. \quad (5.23)$$

На рис. 5.17 наведено зображення (зовнішня крива) екстрапольованого контуру залежно від вузлових контурів та значення параметра  $k$ .

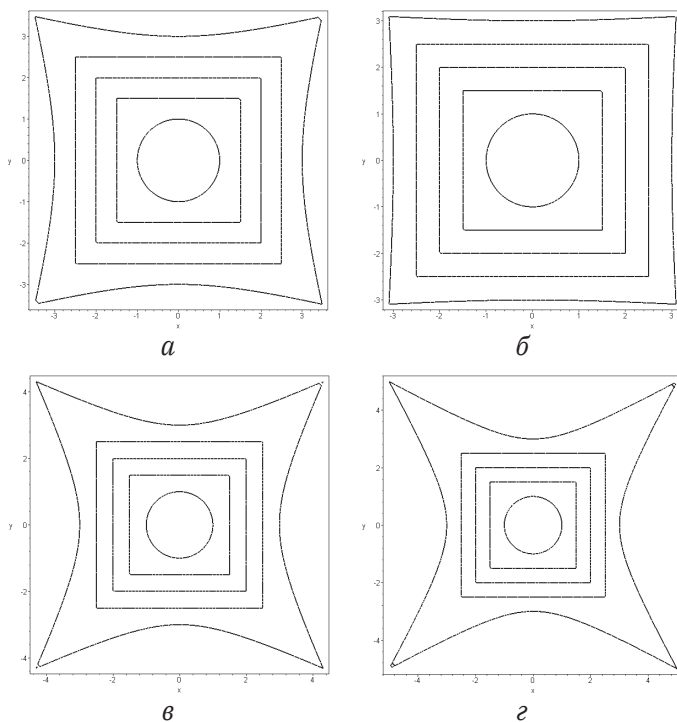


Рисунок 5.17 – Приклади екстраполяції для вихідних контурів "коло – три квадрати": *a* –  $k=0$ ; *б* –  $k=2$ ; *в* –  $k=-2$ ; *г* –  $k=-5$

При цьому варіанту  $k = -2$  відповідає випадок, коли на екстрапольовану криву переважає вплив варіації форми кривих "коло – внутрішній квадрат", що характерне для початкової фази розвитку процесу.

Варіанту  $k = 2$  відповідає випадок, коли на екстрапольовану криву переважає вплив тенденції зміни форми зовнішніх квадратів – це відображає прикінцеву фазу розвитку процесу.

Таким чином, для прикладу 5.9: від'ємні значення  $k$  при екстраполяції за формулою (5.21) відповідають початковій фазі процесу (при цьому "відчувається" вплив зміни форми кола на квадрат), а додатні значення  $k$  відповідають його прикінцевій фазі.

**Приклад 5.10.** Нехай в умовні моменти часу  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$  і  $t_4 = 4$  маємо рівняння чотирьох абстрактних вузлових контурів:

$$F_1 \equiv 1 - \max(f_x, f_y) = 0; F_2 \equiv 2 - \min(f_x, f_y) = 0;$$

$$F_3 \equiv 3 - \min(f_x, f_y) = 0; F_4 \equiv 4 - \min(f_x, f_y) = 0,$$

де

$$f_x = \sqrt{y^2 + (\max(x, a) - \min(x, b))^2}; f_y = \sqrt{(x - 5)^2 + (\max(y, c) - \min(y, d))^2}.$$

Тоді при  $a = -5$ ;  $b = 5$ ;  $c = -1$  і  $d = 5$  після використання формули (5.21) в умовний момент часу  $t_5 = 5$  матимемо опис екстрапольованого зображення у вигляді:

$$F_5(x, y) \equiv 4 - \min \left( \sqrt{(x - 5)^2 + (\max(-1, y) - \min(5, y))^2}, \sqrt{y^2 + (\max(-5, x) - \min(5, x))^2} \right) + \\ + \left( 1 - \min \left( \sqrt{(x - 5)^2 + (\max(-1, y) - \min(5, y))^2}, \sqrt{y^2 + (\max(-5, x) - \min(5, x))^2} \right) \right) + \\ + \max \left( \sqrt{(x - 5)^2 + (\max(-1, y) - \min(5, y))^2}, \sqrt{y^2 + (\max(-5, x) - \min(5, x))^2} \right) + 2^k + 3^k \Big/ (1 + 2^k + 3^k) = 0.$$



На рис. 5.18 наведено екстрапольовані контури залежно від значення регулюючого параметра екстраполяції  $k$ . Через вибір значення регулюючого параметра екстраполяції  $k$  можна досягти того, що на форму екстрапольованої кривої будуть впливати переважно ті чи інші групи вузлових кривих. Так, при від'ємних значеннях  $k$  на форму екстрапольованої кривої переважатиме вплив розбіжностей геометричних форм початкових вузлових кривих (рис. 5.18, *з*), а при додатних значеннях  $k$  на її форму впливатимуть розбіжності геометричних форм прикінцевих вузлових кривих (рис. 5.18, *б*).

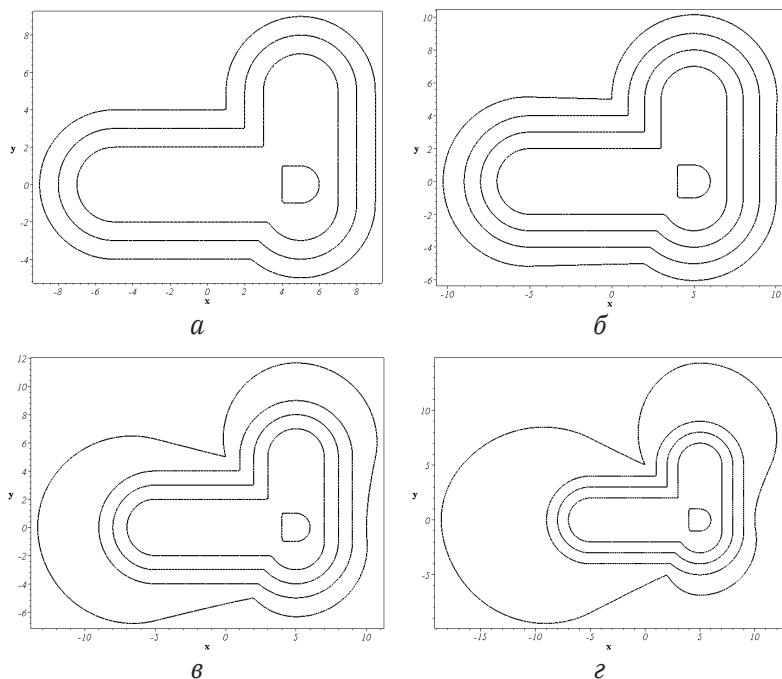


Рисунок 5.18 – Результати екстраполяції в залежності від  $k$ :  
*a* – вузлові контури; *б* – екстраполяція при  $k=3$ ; *в* – екстраполяція при  $k=0$ ; *з* – екстраполяція при  $k=-3$

За допомогою методу векторної іміджевої екстраполяції можна описати як початкову стадію процесу (при від'ємних значеннях  $k$ ),

так і середню стадію цього процесу (при  $k=0$ ), а також прикінцеву стадію (при додатних значеннях  $k$ ).

Проілюстровані переваги моделі, створеної за допомогою іміджевої екстраполяції, зумовлюють розробку алгоритму автоматичної побудови формули для довільного плоского контуру, визначеного опорними точками.

При апроксимації замкнутого контуру багатокутником з подальшим його описом рівнянням вигляду  $F(x, y) = 0$  визначається  $N$  рівнянь  $\{F_i(x, y) = 0\}$ , за допомогою яких описується послідовно кожна сторона багатокутника. Все це досить легко реалізується програмно.

Наступним кроком є реалізація алгоритму В. Л. Рвачова. Орієнтовані рівняння:

$$F_1(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0, \dots, F_{n-1}(x, y) = 0$$

сторін  $N$ -кутника записуються для кожної суміжної пари його вершин (у напрямі, протилежному напрямку руху стрілки годинника). Далі з послідовності функцій  $F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_{n-1}(x, y)$  виділяються дужками ті з них, які описують кожен з западін багатокутника. При цьому враховується те, що в западині може виявитися своя западина і відповідну функцію також необхідно виділити дужками.

У наборі  $F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_{n-1}(x, y)$  (з дужками) потрібно зліва направо розставити знаки  $R$ -функцій  $\vee$  і  $\wedge$ , починаючи зі знака  $R$ -кон'юнкції  $\wedge$ . При переході через дужку знак  $\vee$  змінюється на  $\wedge$ , а знак  $\wedge$  – на  $\vee$ . При цьому обов'язково слід враховувати кратність запису дужок.

**Приклад 5.11.** Рівняння багатокутника, що зображено на рис. 5.2, має вигляд:

$$F_1 \wedge (((F_2 \vee F_3) \wedge F_4) \vee F_5 \vee F_6 \vee (F_7 \wedge F_8 \wedge F_9)) \wedge F_{10} \wedge F_{11} \wedge F_{12} = 0, \quad (5.24)$$

де  $F_i$  – функції, які входять до орієнтованих нормальних рівнянь сторін багатокутника.

Програмна реалізація цього методу натикається на труднощі, пов'язані з формалізацією сортування точок за їх належністю опуклостям та западинам. У цьому сортуванні враховується властивість

нормального рівняння прямої визначати відстані від точки до прямої при підстановці координат цієї точки в рівняння прямої. Важлива наявність можливості установити, з правого чи з лівого боку від прямої розташована ця точка.

Сортування проводять за таким алгоритмом:

1) записують нормальне рівняння прямої, що проходить через дві сусідні точки контуру;

2) використовуючи властивість нормального рівняння прямої, визначають точку, що є найбільш віддаленою від даної прямої в бік додатних значень;

3) у випадку існування такої точки, складають нормальне рівняння прямої, що проходить через першу точку і точку, визначену в п. 2, а потім для них повторюють усі попередні дії;

4) якщо точок, визначених у п. 2, немає, то дана точка належить даному однорідному контуру;

5) виконують дії, описані в пп. 1–4, для точки, визначеної в п. 4, і наступної за нею по контуру;

6) складають рівняння прямих, що проходять через визначені точки однорідного контуру, і застосовують до них послідовно операцію *R*-кон'юнкції;

7) для кожної групи "перепущених" точок (окремо) виконують операції, описані в пп. 1–6 (у п. 6 – інвертувавши функцію *R*-кон'юнкції на *R*-диз'юнкцію та навпаки);

8) вилучають одержані багатокутники з початкового.

Таким чином одержується рівняння складного багатокутника залежно від координат його вершин, заданих у декартовій системі координат.

На практиці реалізацію відносно короткострокових прогнозів може забезпечити така геометрична модель, оскільки вона не є вимогливою до "потужності" обчислювальної техніки і до початкових даних.

Недоліком є те, що ця модель розрахована на процеси, що поширюються без розривів, а реальні процеси, для моделювання яких її створено, мають такі розриви (наприклад, фронт поширення пожежі може бути розірваний протипожежними смугами, річками, озерами; границя перебігу гетерогенної хімічної реакції може бути несучільною через неоднорідності речовин тощо).

## 5.4. Зворотна іміджева екстраполяція

### 5.4.1. Приклад практичного застосування методу іміджевої екстраполяції

Нехай в умовні моменти часу  $t_1=1$ ,  $t_2=2$ ,  $t_3=3$  і  $t_4=4$  маємо результати зйомки зображень фронтів поширення явища (наприклад, лісової пожежі, хімічної реакції та ін.) у вигляді чотирьох схем контурів, нанесених на площину, на якій обрано декартову систему координат  $Oxy$  (рис. 5.19).

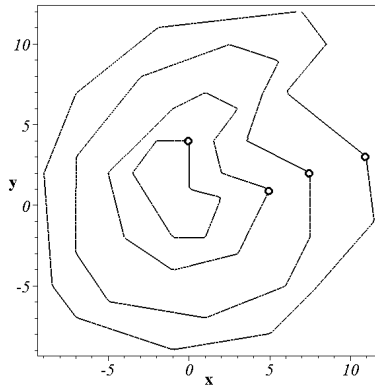


Рисунок 5.19 – Конттури, які одержано в результаті зйомки зображень

На кожному з чотирьох контурів оберемо опорні точки, які вважатимемо вершинами багатокутників. Одержані чотири багатокутники апроксимують реальні конттури. Кожен з багатокутників опишемо за допомогою нормальних рівнянь у вигляді  $F_i(x, y) = 0$  ( $i = 1 \dots 4$ ). Для цього понумеруємо опорні точки в напрямі, протилежному напрямку руху стрілки годинника (на рис. 5.17 перші опорні точки для кожного контуру виділено кружечками).

Кожен з відрізків, що проходять через суміжні вершини багатокутника з координатами  $(x_i, y_i)$  та  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , опишемо за допомогою нормального рівняння. Якщо через  $\vee$  і  $\wedge$  позначити  $R$ -операції:

$$a \vee b = \frac{(a + b + |a - b|)}{2}; \quad a \wedge b = \frac{(a + b - |a - b|)}{2},$$

то згідно з описом багатокутника одержимо відповідні рівняння:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &\equiv f_1 \wedge \dots \wedge f_5 \wedge (f_6 \vee f_7) = 0; \\ F_2(x, y) &\equiv (f_1 \vee f_2 \vee f_3) \wedge f_4 \wedge \dots \wedge f_{10} = 0; \\ F_3(x, y) &\equiv (f_1 \vee f_2 \vee f_3) \wedge f_4 \wedge \dots \wedge f_{12} = 0; \\ F_4(x, y) &\equiv (f_1 \vee f_2 \vee f_3) \wedge f_4 \wedge \dots \wedge f_{13} = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

*Геометричні параметри чотирьох контурів. Опорні точки першого багатокутника:*

$$\begin{aligned} x_1 = 0; \quad y_1 = 4; \quad x_2 = -2; \quad y_2 = 4; \\ x_3 = -3,5; \quad y_3 = 2; \quad x_4 = -1; \quad y_4 = -2; \\ x_5 = 1; \quad y_5 = -2; \quad x_6 = 2; \quad y_6 = 0,5; \\ x_7 = 0; \quad y_7 = 1; \quad x_8 = 0; \quad y_8 = 4. \end{aligned}$$

Рівняння сторін першого багатокутника:

$$\begin{aligned} f_1 = 4 - y; \quad f_2 = 0,8x - 0,6y + 4; \quad f_3 = 0,848x + 0,53y + 1,908; \\ f_4 = y + 2; \quad f_5 = -0,9282x + 1,671 + 0,3713y; \\ f_6 = -0,2425x - 0,97y + 0,97; \quad f_7 = -x. \end{aligned}$$

Логічна формула для опису першого багатокутника:

$$\begin{aligned} b_1 &= (f_1 \wedge f_2) \wedge (f_3 \wedge f_4), \\ b_2 &= f_5 \wedge (f_6 \vee f_7), \\ F_1 &= b_1 \wedge b_2. \end{aligned}$$

Опорні точки *другого багатокутника*:

$$\begin{aligned}x_1 &= 5; & y_1 &= 1; & x_2 &= 2; & y_2 &= 2; \\x_3 &= 1,5; & y_3 &= 4; & x_4 &= 3; & y_4 &= 6; \\x_5 &= 1; & y_5 &= 7; & x_6 &= -1; & y_6 &= 6; \\x_7 &= -5; & y_7 &= 2; & x_8 &= -4; & y_8 &= -2; \\x_9 &= -1; & y_9 &= -4; & x_{10} &= 3; & y_{10} &= -3; \\x_{11} &= 5; & y_{11} &= 1.\end{aligned}$$

Рівняння сторін *другого багатокутника*:

$$\begin{aligned}f_1 &= -0,3162x - 0,9486y + 2,53; \\f_2 &= -0,97x - 0,2425y + 2,425; \\f_3 &= -0,8x + 0,6y - 1,2; \\f_4 &= -0,4472x - 0,8944y + 6,708; \\f_5 &= 0,4472x - 0,8944y + 5,814; \\f_6 &= 0,707x - 0,707y + 4,949; \\f_7 &= 0,9699x + 0,2425y + 4,365; \\f_8 &= 0,5547x + 0,8323y + 3,883; \\f_9 &= -0,2425x + 0,9699y + 3,637; \\f_{10} &= -0,8944x + 0,4472y + 4,025.\end{aligned}$$

Логічна формула для опису *другого багатокутника*:

$$\begin{aligned}b_1 &= f_1 \vee (f_2 \vee f_3), \\b_2 &= (f_4 \wedge f_5) \wedge (f_6 \wedge f_7), \\b_3 &= (b_1 \wedge f_8) \wedge (f_9 \wedge f_{10}), \\F_2 &= b_2 \wedge b_3.\end{aligned}$$

На рис. 5.20 і 5.21 наведено зображення перших двох багатокутників.

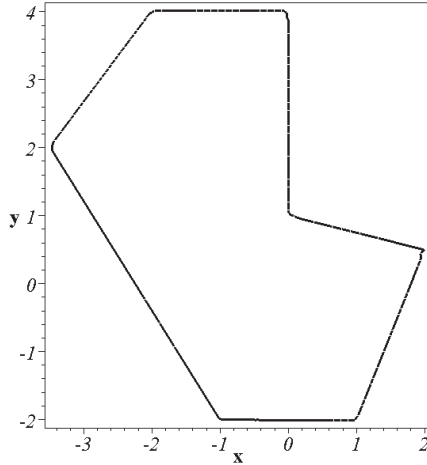


Рисунок 5.20 – Перший контур

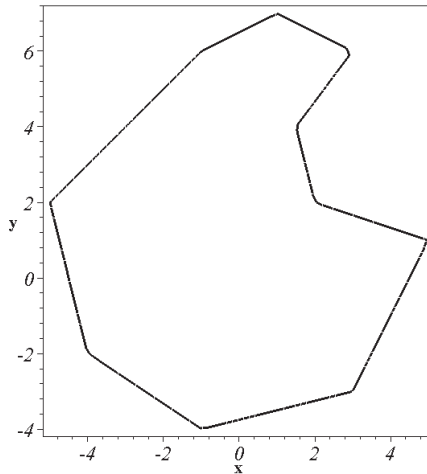


Рисунок 5.21 – Другий контур

Опорні точки *третього багатокутника*:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7,5; & y_1 &= 2; & x_2 &= 3,5; & y_2 &= 4; \\ x_3 &= 4,5; & y_3 &= 7; & x_4 &= 5,5; & y_4 &= 9; \\ x_5 &= 2,5; & y_5 &= 10; & x_6 &= -3; & y_6 &= 8; \\ x_7 &= -7; & y_7 &= 3; & x_8 &= -7; & y_8 &= -3; \\ x_9 &= -5; & y_9 &= -6; & x_{10} &= 1; & y_{10} &= -7; \\ x_{11} &= 6; & y_{11} &= -5; & x_{12} &= 7,5; & y_{12} &= -2; \\ x_{13} &= 7,5; & y_{13} &= 2. \end{aligned}$$

Рівняння сторін третього багатокутника:

$$\begin{aligned} f_1 &= -0,4472x - 0,8944y + 5,143; \\ f_2 &= -0,9489x + 0,3163y + 2,056; \\ f_3 &= -0,8944x + 0,4472y + 0,8944; \\ f_4 &= -0,3163x - 0,9489y + 10,28; \\ f_5 &= 0,3418x - 0,94y + 8,545; \\ f_6 &= 0,781x - 0,6246y + 7,339; \\ f_7 &= x + 7; & f_8 &= 0,8323x + 0,5547y + 7,489; \\ f_9 &= 0,1644x + 0,9866y + 6,741; \\ f_{10} &= -0,3713x + 0,9282y + 6,868; \\ f_{11} &= -0,8946x + 0,4473y + 7,604; & f_{12} &= -x + 7,5. \end{aligned}$$

Логічна формула для опису третього багатокутника:

$$\begin{aligned} b_1 &= f_1 \vee (f_2 \vee f_3); \\ b_2 &= (f_4 \wedge f_5) \wedge (f_6 \wedge f_7); \\ b_3 &= (b_1 \wedge f_8) \wedge (f_9 \wedge f_{10}); \\ F_3 &= (b_2 \wedge b_3) \wedge (f_{11} \wedge f_{12}). \end{aligned}$$


---



Опорні точки *четвертого багатокутника*:

$$\begin{aligned} x_1 &= 11; & y_1 &= 3; & x_2 &= 6; & y_2 &= 7; \\ x_3 &= 8,5; & y_3 &= 10; & x_4 &= 7; & y_4 &= 12; \\ x_5 &= -2; & y_5 &= 11; & x_6 &= -7; & y_6 &= 7; \\ x_7 &= -9; & y_7 &= 2; & x_8 &= -8,5; & y_8 &= -5; \\ x_9 &= -7; & y_9 &= -7; & x_{10} &= -1; & y_{10} &= -9; \\ x_{11} &= 5; & y_{11} &= -8; & x_{12} &= 8; & y_{12} &= -5; \\ x_{13} &= 11,5; & y_{13} &= -1; & x_{14} &= 11; & y_{14} &= 3. \end{aligned}$$

Рівняння сторін четвертого багатокутника:

$$\begin{aligned} f_1 &= -0,6246x - 0,781y + 9,215; & f_2 &= -0,7683x + 0,6402y + 0,128; \\ f_3 &= -0,8x - 0,6y + 12,8; & f_4 &= 0,1105x - 0,9943y + 11,16; \\ f_5 &= 0,6246x - 0,781y + 9,839; & f_6 &= 0,9282x - 0,3713y + 9,099; \\ f_7 &= 0,9975x + 0,7125y + 8,835; & f_8 &= 0,8x + 0,6y + 9,8; \\ f_9 &= 0,3162x + 0,9485y + 8,855; & f_{10} &= -0,1644x + 0,9866y + 8,714; \\ f_{11} &= -0,7071x + 0,7071y + 9,194; & f_{12} &= -0,7524x + 0,6584y + 9,311; \\ f_{13} &= -0,9924x - 0,124y + 11,29. \end{aligned}$$

Логічна формула для опису четвертого багатокутника:

$$\begin{aligned} b_1 &= f_1 \vee f_2; \\ b_2 &= (f_3 \wedge f_4) \wedge (f_5 \wedge f_6); \\ b_3 &= (f_7 \wedge f_8) \wedge (f_9 \wedge f_{10}); \\ b_4 &= (f_{11} \wedge f_{12}) \wedge (f_{13} \wedge b_1); \\ F_4 &= (b_2 \wedge b_3) \wedge b_4. \end{aligned}$$

На рис. 5.22 і 5.23 наведено зображення третього і четвертого багатокутників.

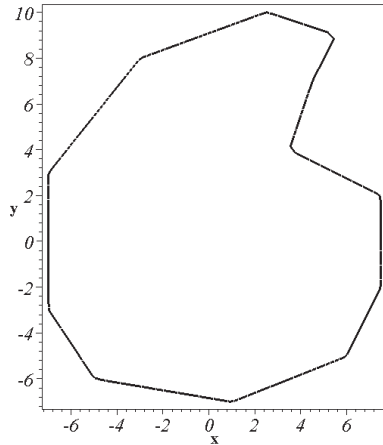


Рисунок 5.22 – Третій контур

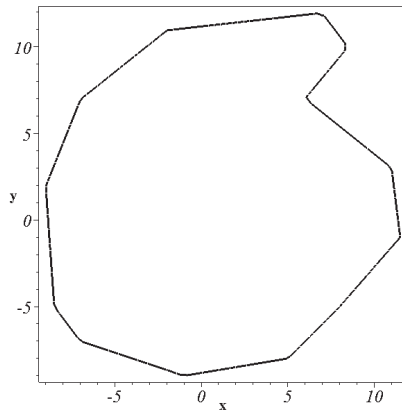
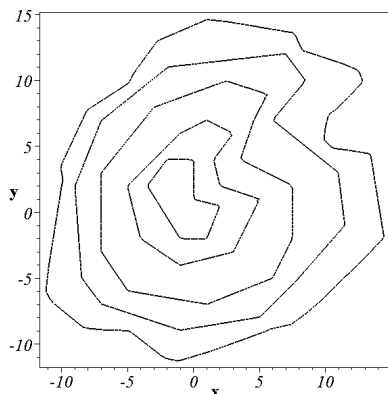
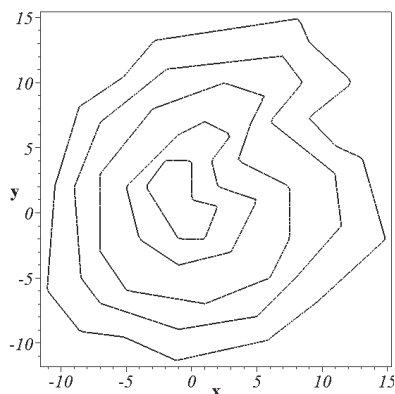


Рисунок 5.23 – Четвертий контур

Програма прогнозування форми контуру залежно від параметра екстраполяції  $k$  складається на основі формули іміджевої векторної екстраполяції (5.21).

У результаті виконання програми одержується прогноз "поведінки" кривої на умовний момент часу  $t_5 = 5$  залежно від параметра екстраполяції  $k$ . При цьому значенню  $k = -2$  відповідає початкова фаза процесу (рис. 5.24), значенню  $k = 0$  – його середня фаза (рис. 5.25), а значенню  $k = 2$  – прикінцева фаза процесу (рис. 5.26).

Опис сім'ї квазіпаралельних кривих, що є сім'єю контурів для різних фаз перебігу процесу, одержується за певною кількістю вузлових зображень.

Рисунок 5.24 – Екстраполяція при  $k = -2$  (початкова фаза)Рисунок 5.25 – Екстраполяція при  $k = 0$  (середня фаза)

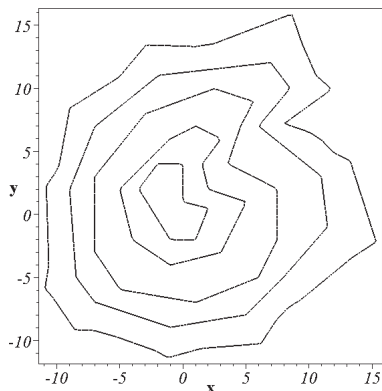


Рисунок 5.26 – Екстраполяція при  $k=2$  (прикінцева фаза)

Залежно від геометричної форми вузлових зображень за наведеним алгоритмом одержуються зображення контурів *трьох типів*: проміжних; тих, що передують вузловим зображенням; прогнозованих у заздалегідь визначені моменти часу.

За допомогою методу іміджевої екстраполяції прогнозується за часом характер "поведінки" квазіпаралельних кривих. При цьому важливим є регулюючий параметр  $k$ .

Через параметр екстраполяції  $k$  враховується ступінь впливу початкових або прикінцевих вузлових кривих на результат. Якщо параметр екстраполяції  $k$  має зміст параметра, що характеризує і фізико-хімічні властивості процесу для даної конкретної задачі в даний момент часу, то збільшується адекватність геометричної моделі, основаної на іміджевій екстраполяції.

#### 5.4.2. Зворотна іміджева екстраполяція

Нехай, як і в попередній задачі, початковими даними є чотири контури, зображення яких одержано, відповідно, в моменти часу  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  і  $t_4$ . Після виконання певних дій також одержано п'ятий екстрапольований контур для моменту часу  $t_5$ . Якщо реальний процес продовжується і є можливість ще знімати дані, то на момент часу  $t_5$  маємо зображення реального контуру. Екстрапольований контур, який

описано рівнянням  $F_5 = 0$ , порівнюється із зображенням реального контуру, описаним рівнянням  $\Phi = 0$ . Через порівняння функцій  $F_5$  і  $\Phi$  визначається параметр екстраполяції  $k(x, y)$ , який і характеризує фізико-хімічні властивості процесу на даний момент часу.

Реалізуємо такий підхід за допомогою формул. Нехай в умовні моменти часу  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  і  $t_3 = 3$  описи контурів маємо у вигляді  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$  і  $F_3 = 0$ . Тоді теоретичний контур на момент часу  $t_4 = 4$  можна описати у вигляді:

$$F_4(x, y) \equiv F_3 + \frac{(F_2 - F_1) + (F_3 - F_2)2^k}{1 + 2^k} = 0. \quad (5.26)$$

Нехай на момент часу  $t_4 = 4$  з'явилася можливість визначити рівняння  $\Phi_4 = 0$  реального контуру. З виразу:

$$\Phi_4(x, y) = F_3 + \frac{(F_2 - F_1) + (F_3 - F_2)2^k}{1 + 2^k} \quad (5.27)$$

обчислимо значення  $k$ , яке забезпечить опис екстрапольованої кривої у вигляді  $\Phi_4 = 0$ :

$$k(x, y) = \ln \left( \frac{F_3 + F_2 - \Phi_4 - F_1}{\Phi_4 - 2F_3 + F_2} \right) / \ln 2. \quad (5.28)$$

Тоді рівняння уточненої кривої на момент часу  $t_4 = 4$  матиме вигляд:

$$F_4^*(x, y) \equiv F_3 + \frac{(F_2 - F_1) + (F_3 - F_2)2^{k(x, y)}}{1 + 2^{k(x, y)}} = 0. \quad (5.29)$$

На рис. 5.27 наведено приклад екстраполяції за формулою (5.29) і параметром екстраполяції, обчисленим за формулою (5.28). У результаті знайдено зовнішній контур. Відносна похибка площ, обмежених контурами, для даного прикладу не перевищує 12 %.

Причина помітних розбіжностей геометричних форм екстрапольованого і шуканого контурів пояснюється характером функції  $k(x, y)$ , графік якої має "радіальний" характер (рис. 5.28). У випадку

збільшення кількості вузлів екстраполяції зменшуються розбіжності, що зумовлює зменшення відносної похибки площ, обмежених екстрапольованим і шуканим контурами.

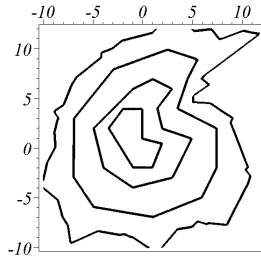


Рисунок 5.27 – Приклад результату екстраполяції (зовнішній контур)

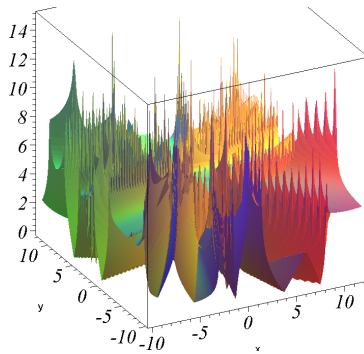


Рисунок 5.28 – Графік функції  $k = k(x, y)$

Таким чином, для комп'ютерної реалізації методу зворотної іміджевої екстраполяції необхідно виконати такі етапи:

1. Одержання зображень  $N$  реальних фронтів (границь, ізолій) перебігу процесу з метою побудови растрового зображення реального контуру; сегментація зображення і складання рівняння контуру  $G: F(x, y) = 0$ .

2. Організація бази даних з описами  $N$  послідовних контурів  $\{G_n\}$ , де  $n = 1 \dots N$ .

3. Здійснення опису  $F_{N+1}(x, y) = 0$  екстрапольованого контуру за формулою іміджевої екстраполяції.

4. Одержання зображення  $(N + 1)$ -го реального фронту (границі, ізолінії); побудова растрового зображення реального контуру  $G_{N+1}$ .

5. Сегментація растрового зображення і складання рівняння контуру  $G_{N+1}$ :  $\Phi_{N+1}(x, y) = 0$ .

6. Визначення функції регулюючого параметра  $k(x, y)$  в результаті порівняння функцій  $F_{N+1}(x, y)$  і  $\Phi_{N+1}(x, y)$ .

7. Здійснення опису  $F_{N+1}(x, y) = 0$  за допомогою функції  $k(x, y)$  та побудова за цим описом зображення для перевірки  $k$ .

8. Продовження екстраполяції процесу, за необхідності час від часу виконуючи відновлення функції  $k(x, y)$ .

Деякі з цих пунктів є самостійними задачами.

Модель зворотної векторної екстраполяції призначена для надання короткострокових прогнозів на основі мінімальної кількості інформації про умови перебігу процесу, геометричною інтерпретацією якого є сім'я квазіпаралельних ліній.

### **Контрольні запитання та вправи**

1. Визначити дві проблеми в моделюванні границь розділу фаз процесів, що розвиваються за часом.

2. Охарактеризувати основні загальні етапи побудови моделі на основі іміджевої екстраполяції.

3. Сутність інтерполяції та екстраполяції.

4. Пояснити лінійну інтерполяцію.

5. Кубічний сплайн та його застосування в сплайн-інтерполяції.

6. Пояснити поняття іміджевої інтерполяції та екстраполяції.

7. Види іміджевої інтерполяції та екстраполяції.

8. Сутність векторної іміджевої екстраполяції та регулюючий параметр.

9. Пояснити іміджеву екстраполяцію для сім'ї контурів у вигляді багатокутників.

10. Пояснити поняття зворотної іміджевої екстраполяції.

## **РОЗДІЛ 6.**

### **ВІЗУАЛІЗАЦІЯ І АНІМАЦІЯ**

#### **В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Геометрична інтерпретація процесів і явищ реалізується через візуалізацію їхніх моделей. Аналіз геометричних моделей проводиться візуально за одержаними зображеннями поверхонь, ліній. В геометричному моделюванні результати розв'язання систем рівнянь обов'язково подаються як візуальні картини (графіки). До визначення, наприклад, поведінки динамічних систем застосовується анімаційний підхід, де певним станам системи відповідає низка кадрів анімації. Геометричні підходи є прийнятними для моделювання об'єктів і процесів у різних науково-технічних галузях.

Прикладами задач з різних галузей є:

- трасування мобільного робота по поверхні та переміщення його серед перешкод;
- визначення хаотичності динамічної системи;
- розробка відбивальних систем, вивчення поширення збурення в активному середовищі.

#### **6.1. Геометричне моделювання на основі властивостей геодезичних кривих**

Теорія геодезичних ліній має численні впровадження:

- при розрахунку форми тріщин у матеріалах;
- для дослідження геометричних характеристик геодезичних трубок;
- для вивчення руху масивних часток у гравітаційних полях;
- при трасуванні роботів тощо.

У дослідженнях геодезичних ліній поверхонь розв'язуються системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Ці рівняння в більшості випадків не мають аналітичного розв'язку, тому застосовуються комп'ютерні методи дослідження систем рівнянь геодезичних.



### 6.1.1. Геодезична лінія за заданими точкою і напрямком на гладкій поверхні

*Метод відстеження середньої (геодезичної) кривої, яка розташовується між двома граничними допоміжними кривими* (рис. 6.1). Метод для регулярних поверхонь, базується на чисельному розв'язанні системи рівнянь для геодезичної лінії у просторі параметрів поверхні.

*"Метод пострілів"*. Геодезична визначається наближеним способом кінцевої різниці. На практиці на результат впливає вибір початкових кутів у початковій точці (рис. 6.2).

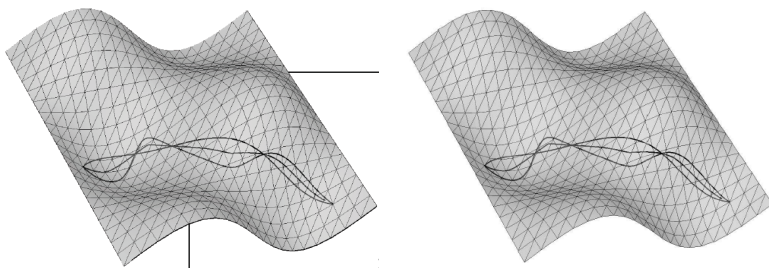


Рисунок 6.1 – Приклад побудови геодезичної регулярної поверхні

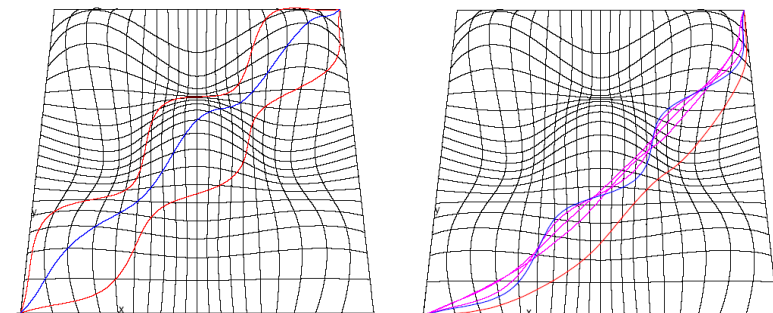


Рисунок 6.2 – Приклад побудови геодезичних "методом пострілів"

*Спосіб із застосуванням символів Крістоффеля.* Це спосіб опису та побудови геодезичної лінії, яка виходить з даної точки у заданому напрямку гладкої поверхні.

Алгоритм розв'язання такий:

- 1) за заданими параметричними рівняннями поверхні формується система диференціальних рівнянь геодезичних;
- 2) формується система початкових умов;
- 3) створюється процедура чисельного інтегрування системи рівнянь геодезичних при заданих початкових умовах;
- 4) створюється процедура графічного подання розв'язання системи рівнянь геодезичних;
- 5) за необхідності здійснюється динамічна візуалізація руху частки по геодезичній лінії заданої поверхні.

Геодезична лінія описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 uv' + \Gamma_{22}^1 v'^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 uv' + \Gamma_{22}^2 v'^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

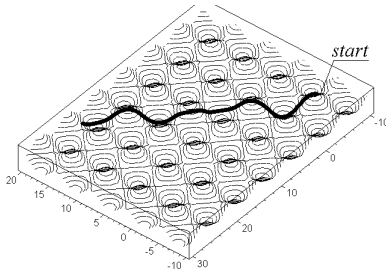
З курсу диференціальних рівнянь відомо, що з врахуванням початкових умов  $u(0) = u_0$ ,  $v(0) = v_0$ ,  $u'(0) = du_0$ ,  $v'(0) = dv_0$  система (6.1) має єдиний розв'язок. Це означає, що через кожену точку поверхні в заданому напрямку проходить тільки одна геодезична.

Вирази  $\Gamma_{ij}^k$  називаються *символами Крістоффеля*. Їхні значення визначають через коефіцієнти другої квадратичної форми. У випадку ортогональних координат  $Ouv$  вирази для обчислення символів Крістоффеля суттєво спрощуються.

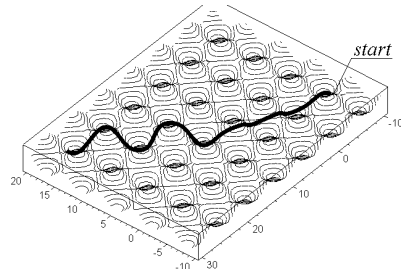
На рис. 6.3 наведено приклад використання способу побудови геодезичних ліній із застосуванням символів Крістоффеля для поверхні  $z = \sin(u) + \sin(v)$ . Під час програмної реалізації:

- обчислюються коефіцієнти другої квадратичної форми та їх похідні (наведено фрагмент програми);
- за формулою (6.1) складається система диференціальних рівнянь для опису геодезичної лінії;
- задаються крайові умови для розв'язання диференціальних рівнянь: межі зміни параметра  $u$  – від  $-10$  до  $20$ , параметра  $v$  – від  $-10$  до  $30$ ; початкові значення  $u_0 = -5$  і  $v_0 = -5$ , а їхніх похідних, відповідно,  $4$  та  $3,5$ ; межа зміни параметра  $t = 7$  і кількість точок лінії геодезичної  $N = 550$ ; дискретність побудови сітки поверхні  $50$  і параметри аксонометрії  $\theta = 105^\circ$ ,  $\phi = 33^\circ$ ;

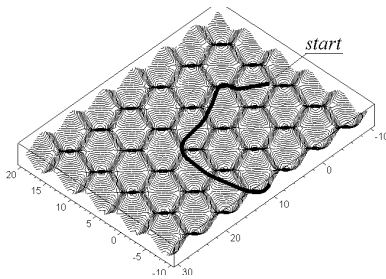
- розв'язується система диференціальних рівнянь;
- реалізується сумісна побудова поверхні та геодезичної лінії на цій поверхні, результат візуалізується (рис. 6.3).



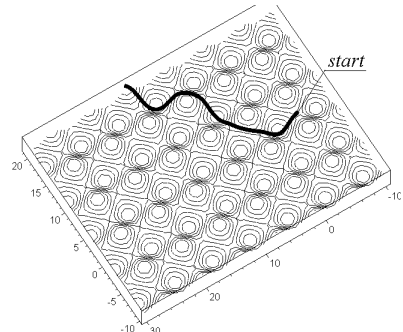
$$u_0 = -5, v_0 = -5, u'_0 = 4, v'_0 = 3,5$$



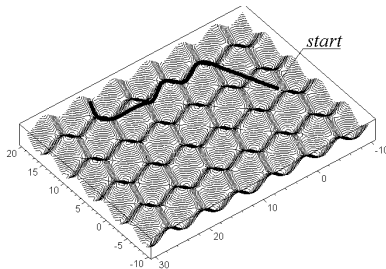
$$u_0 = -5, v_0 = -5, u'_0 = 4, v'_0 = 1,5$$



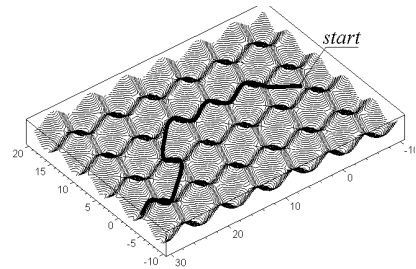
$$u_0 = 5, v_0 = -5, u'_0 = 2, v'_0 = 4,5$$



$$u_0 = 5, v_0 = -5, u'_0 = -1,5, v'_0 = 4,5$$



$$u_0 = 5, v_0 = -5, u'_0 = 1,5, v'_0 = 1,5$$



$$u_0 = 5, v_0 = -5, u'_0 = 1,5, v'_0 = 3$$

Рисунок 6.3 – Приклади побудови поверхні і геодезичної лінії на цій поверхні залежно від крайових умов

### **6.1.2. Геодезична лінія між двома заданими точками на гладкій поверхні**

Якщо поставлено завдання знайти найкоротшу лінію на поверхні між заданими на цій поверхні двома точками, то шуканою лінією буде частина *геодезичної лінії*, що проходить через ці точки. Обернений висновок не завжди справедливий, тому що іноді частина геодезичної лінії, що проходить через дві задані на поверхні точки і укладена між цими точками, може не бути найкоротшою.

У механіці геодезична лінія відіграє важливу роль: по ній рухається точка, що повинна залишатися на поверхні в тому випадку, коли на точку не діють ніякі зовнішні сили.

Сучасний мобільний робот – це складна механічна система, здатна сенсорно сприймати навколишнє середовище й аналізувати його стан для здійснення автономної навігації й керованого руху до місця виконання конкретних завдань. Інтегрована система навігації має розпізнавати й моделювати навколишнє середовище. При цьому одним з головних компонентів керування рухом є визначення напрямку огинання конкретної перешкоди на площині.

Планування маршруту руху мобільного робота з огинанням перешкоди базується на використанні *геодезичної лінії*. Моделювання перешкоди відбувається за допомогою гладкої поверхні обертання, на основі опису, побудови та аналізу геодезичних на цій поверхні. Ця задача є *базовою* для побудови *алгоритму гладкого керування траєкторним рухом мобільного робота в середовищі з перешкодами*, що апроксимуються гладкими поверхнями з горизонтальними перетинами, подібними овалу. Плоска топографічна карта з наявністю перешкод подається як неплоска поверхня, а перешкоди замінюються гладкими умовними "пагорбами". Якщо на цій неплоскій топографічній карті вільним від перешкод зони задати додатковими "пагорбами" й "западинами", то формується для розв'язання розширюється задача, де вже необхідно ще врахувати витрати ресурсів при проїзді по цим зонам (врахувати наявні характеристики місцевості – заболоченість, трав'яний покрив, асфальт, ґрунт, пісок тощо).

Після того, як визначено модель (вигляд і характеристики) топографічної карти, описується траєкторія руху (за допомогою аналітичних або чисельних методів).

Чисельний алгоритм знаходження наближеного розташунок геодезичної на заданій поверхні полягає у такому:

1. Як вихідні дані на поверхні вибираються "стартова" точка і початковий напрямок геодезичної лінії.
2. В обраній точці обчислюється нормаль до поверхні.
3. Визначається проєкція вектору напрямку геодезичної лінії на площині, яку задано нормаллю.
4. Здійснюється зміщення на певну величину  $\Delta$  уздовж знайденого вектору, спроекційованого на нормаль з урахуванням напрямку на "фінішну" точку.
5. З використанням функції обчислення відстані визначається точка на поверхні, що є найближчою до розрахункової точки.
6. Одержується нормаль до поверхні в цій точці.
7. При необхідності все повторюється, розпочинаючи з пункту 3 цього алгоритму.
8. В результаті одержують наближений розташунок геодезичної на поверхні.

Рис. 6.4 ілюструє побудову геодезичної за наведеним алгоритмом.

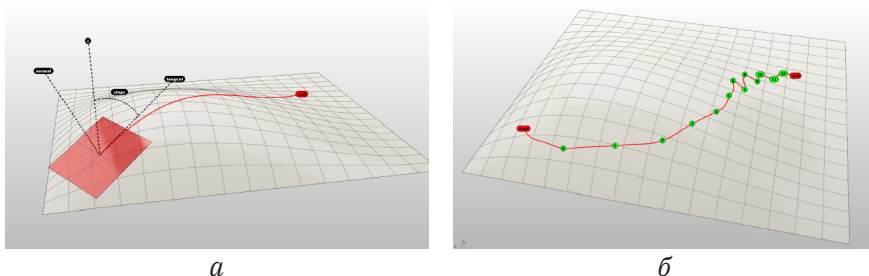


Рисунок 6.4 – Приклад побудови геодезичної за чисельним алгоритмом: *а* – конструктивні елементи алгоритму; *б* – результат побудови

Більш точна побудова геодезичної лінії реалізується, якщо цю лінію описано за допомогою системи диференціальних рівнянь.

Прямий спосіб розв'язання задачі побудови геодезичної лінії на поверхні  $G(x, y, z) = 0$  в прямокутних координатах зводиться до знаходження розв'язків двох диференціальних рівнянь геодезичної лінії:

$$\begin{aligned} \left[ d(dx/ds) \right] / (dG/dx) &= \left[ d(dy/ds) \right] / (dG/dy) = \\ &= \left[ d(dz/ds) \right] / (dG/dz), \end{aligned} \quad (6.2)$$

де  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ .

Через розв'язання диференціальних рівнянь (6.2) одержується *найкоротша* лінія на поверхні між двома заданими точками на цій поверхні.

Але на практиці для визначення геодезичних ліній зручніше використовувати *варіаційні методи*, де простіше поєднати аналітичні вирази і опис геометричної форми об'єктів (поверхонь).

Існують *два різновиди побудови геодезичної на поверхні залежно від обраних крайових умов*.

У першому випадку геодезична лінія будується за заданими "стартовою" точкою і початковим напрямком. У другому випадку (більш складному) геодезична лінія будується за заданими "стартовою" і "фінішною" точками.

*Спосіб опису та побудови геодезичної лінії на основі варіаційних принципів* відноситься до другого випадку, тобто він використовується для опису і побудови геодезичної лінії, яка сполучає дві точки на гладкій поверхні.

В алгоритмі моделювання траєкторії руху робота по неплоскій поверхні (який оснований на описі та побудові геодезичної лінії) можна враховувати різні коефіцієнти прохідності по конкретним ділянкам площини.

*Перший варіант варіаційної постановки задачі.* Розглянемо точки  $A$  і  $B$  на поверхні умовного "пагорба" (рис. 6.5).

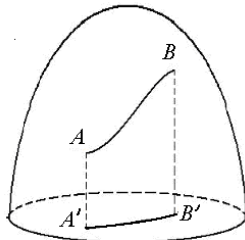


Рисунок 6.5 – Умовний "пагорб"

Серед всіх кривих, які ми можемо провести на цій поверхні із точки  $A$  в точку  $B$ , існує одна найкоротша, яка називається *геодезичною*. Одним зі способів визначення геодезичної є обчислення її проєкції на площині  $Oxy$ . Рівняння проєкції  $A'B'$  разом з рівнянням поверхні визначають геодезичну лінію.

Нехай рівняння поверхні умовного "пагорба" є  $z = F(x, y)$ . Тоді, якщо параметрам  $x$  і  $y$  надати прирости  $dx$  і  $dy$ , то параметр  $z$  одержить приріст:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Отже, для елемента довжини дуги  $ds$  маємо:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right)^2. \quad (6.3)$$

Припустимо, що точки  $A$  і  $B$  з'єднані довільною кривою, проєкцією якої на площині  $Oxy$  є  $y = y(x)$ . Тоді довжина кривої дорівнює:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' \right)^2} dx. \quad (6.4)$$

Мінімум інтеграла (6.4) визначає геодезичну. Але це є досить складною задачею обчислювального характеру.

**Другий варіант варіаційної постановки задачі.** Нехай неплоска робоча зона виражається функцією  $z = F(x, y)$ , де  $z$  – "висота" заданої точки траєкторії,  $x$  і  $y$  – декартові координати проєкції точки поверхні на площині.

Потрібно мінімізувати функціонал:

$$T = \int_{x_S}^{x_E} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{F(x, y)} dx$$

з такими граничними умовами:  $y(x_S) = y_S$ ,  $y(x_E) = y_E$ , де  $x_S$  і  $y_S$  – декартові координати "стартової" точки;  $x_E$  і  $y_E$  – декартові координати кінцевої (цільової) точки.

При визначенні екстремуму функціонала вимога, щоб шукана крива мала б рівняння  $y=y(x)$ , може істотно звузити завдання. Може виявитися, що прямі, паралельні до осі  $y$ , перетинають криву. Це означає, що розв'язок буде більше, ніж в одній точці. Для запобігання такої ситуації до виразу функціоналу вводиться параметричне задання шуканої кривої у вигляді:

$$T = \int_{x_s}^{x_E} \frac{\sqrt{1+(y'/x')^2}}{F(x,y)} x' dt \quad (6.5)$$

з граничними умовами  $x(0) = x_s$ ,  $y(0) = y_s$ ,  $x(t_E) = x_E$ ,  $y(t_E) = y_E$ .

Розв'язання зводиться до знаходження розв'язку системи двох диференціальних рівнянь 2-го порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} Wx'' + \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} Wx' + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x'} W - \frac{\partial}{\partial x} W &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial y'^2} Wy'' + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} Wy' + \frac{\partial^2}{\partial t \partial y'} W - \frac{\partial}{\partial y} W &= 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

де

$$W = \frac{\sqrt{1+(y'/x')^2}}{F(x,y)} x'.$$

Розв'язання системи рівнянь (6.6) є також непростою задачею обчислювального характеру.

**Третій варіант варіаційної постановки задачі.** На практиці зручнішим є варіант постановки задачі про геодезичну лінію з використанням рівнянь Ейлера – Лагранжа. Необхідно визначити лінію найменшої довжини на поверхні  $G(x, y, z) = 0$ , що з'єднає точки  $A(a, p)$  і  $B(b, p)$ . Для розв'язання слід врахувати довжину просторової кривої, описаної рівняннями  $y=y(x)$  і  $z=z(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Ця довжина дорівнює інтегралу:

$$s(y, z) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx. \quad (6.7)$$



Функція Лагранжа з множником  $\lambda(x)$ :

$$w = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)G(x, y, z). \quad (6.8)$$

Для визначення екстремалі одержується система рівнянь у вигляді рівняння Ейлера – Лагранжа з множником  $\lambda(x)$ :

$$\lambda(x)G_y - \frac{d}{dy} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad \lambda(x)G_z - \frac{d}{dz} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad (6.9)$$

Систему рівнянь (6.9) слід розв'язати з урахуванням рівняння зв'язку  $G(x, y, z) = 0$  і граничних умов.

На рис. 6.6 наведено приклад моделювання для поверхні  $f = \sin(x/1,5) \cdot \sin(y/1,5)$  залежно від різних розташунок "стартової" і "фінішної" точок. Зображення розв'язку подається у вигляді графіка рівнянь Ейлера – Лагранжа на поверхні.

На рис. 6.7 наведено аналогічні приклади моделювання для поверхні  $f = 4\sin(x/2) \cdot \cos(3y/5) + 2\sin(x) \cdot \cos(y)$ .

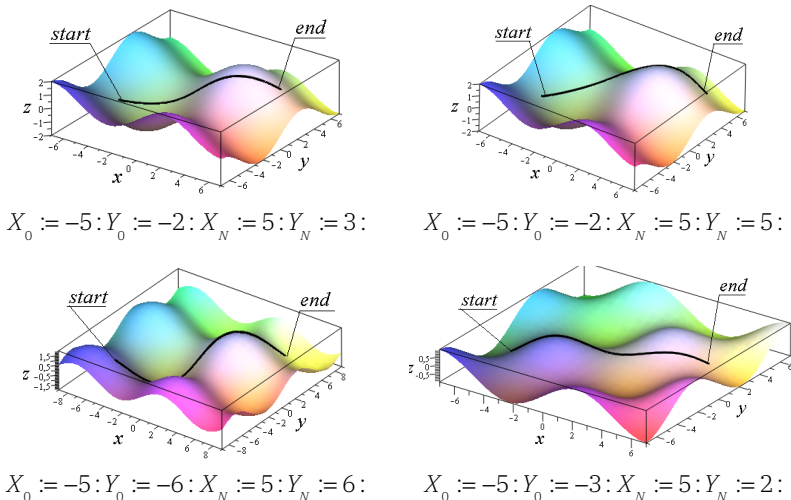
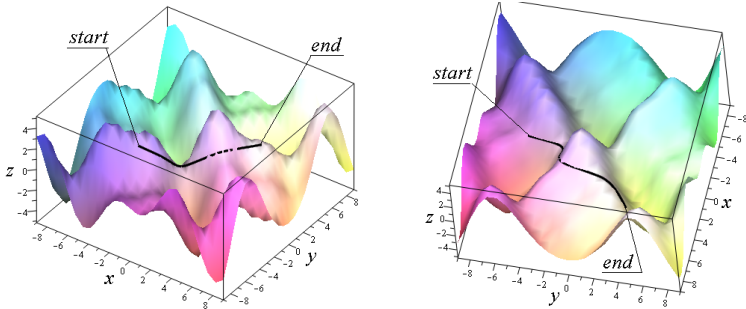


Рисунок 6.6 – Приклади зображень геодезичних ліній на поверхні  $f = \sin(x/1,5) \cdot \sin(y/1,5)$



$$X_0 := -2 : Y_0 := -5 : X_N := 5 : Y_N := 2 : \quad X_0 := 0 : Y_0 := -5 : X_N := 5 : Y_N := 4 :$$

Рисунок 6.7 – Приклади зображень геодезичних ліній на поверхні  $f = 4\sin(x/2) \cdot \cos(3y/5) + 2\sin(x) \cdot \cos(y)$

В цих прикладах описано і побудовано геодезичну лінію, яка розташована на заданій гладкій поверхні, виходить із заданої "стартової" точки та прямує до заданої "фінішної" точки.

## 6.2. Геометричне моделювання шляху переміщення робота серед перешкод

Для протипожежного нагляду в місцях зберігання контейнерів, автомобілів, цистерн та інших цінностей доцільно використовувати мобільні роботи. Також мобільні роботи незамінні при інспектуванні та виконанні профілактичних робіт в підземних сховищах, де можливе виникнення умов, які шкідливі для людини. В цих умовах бажано, щоб керування роботами здійснювалося в автоматичному режимі.

Задача геометричного моделювання шляху руху робота серед перешкод пов'язується з визначенням шляху переміщення робота між двома точками серед перешкод, що мають вигляд прямокутників в плані. Для розв'язання задачі необхідним є математичне наповнення алгоритмів.

Найпростішим алгоритмом визначення шляху серед перешкод є *хвильовий алгоритм*. Запускається уявна хвиля зі стартової точки, що поступово заповнює площину, у підсумку доходючи до цільової

точки. До переваг хвильового алгоритму відносяться простота реалізації та можливість визначення найкоротшого шляху. Хоча остання перевага досягається не раціонально, адже пошук замість того, щоб бути спрямованим до мети, іде рівномірно у всіх напрямках.

Модифікацією хвильового алгоритму є *двоххвильовий алгоритм*, де "запускаються" дві хвилі: зі стартової й цільової точок. Алгоритм працює до зустрічі двох хвильових фронтів.

На базі зазначеного вище ґрунтується *алгоритм Best-First Search*, спрямований на виправлення основного недоліку попередніх алгоритмів, а саме – на виправлення ігнорування пріоритетного напрямку просування до мети та використання евристичного пошуку. Такі алгоритми мають високу швидкість роботи. Проте до їхніх недоліків відноситься необхідність визначення шляхів траси, які вигинаються навколо перешкоди (а не є відрізками прямих) і які необхідно інтерпретувати керуванням робота.

Найбільш використовуваним алгоритмом пошуку оптимальних шляхів вважається "*Алгоритм А\**", який поєднує у собі переваги попередніх алгоритмів і використовує евристики (B-F Search). До недоліків "Алгоритму А\*" відносять, по суті, суб'єктивний фактор – якість роботи алгоритму сильно залежить від якості евристичного наближення (яке формулює фахівець); якщо наближення буде низьким, то спостерігається різке погіршення роботи алгоритму.

*Метод потенціальних полів* вважається найкращим алгоритмом трасування мобільних роботів. Зазначена навігація базується на абстрактній ідеї того, що навколишні об'єкти притягають або відштовхують мобільного робота в процесі руху. При цьому прийняті умови: точка цілі має деякий *позитивний* заряд; фігури-перешкоди заряджені *негативно*; місця розташування точки цілі і перешкод фіксовані; рухома точка-робот заряджена *негативно*. Тоді під дією сил рухома точка буде відштовхуватися від перешкод й притягуватися до цілі; за певних умов робот має досягти мети.

До *недоліків методу потенціальних полів* відносяться:

– складність побудови потенціальних функцій для перешкод з кутовими точками, в яких *втрачає сенс похідна по нормалі до контурів перешкод*;

– в процесі визначення траси приховується геометрична сутність етапів розрахунків;



**Твердження 6.1.** Квадрат зі стороною  $2R$  і з "округленими" кутами описується параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} x &= R \begin{pmatrix} 0,8158924396 \cdot (\cos t - \sin t) + \\ + 0,1359820733 \cdot (\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix}; \\ y &= R \begin{pmatrix} 0,8158924396 \cdot (\cos t + \sin t) + \\ + 0,1359820733 \cdot (\cos 3t - \sin 3t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

На рис. 6.9 для  $R = 2,3$  зображено еквідистанти кривої, описаної рівняннями (6.10).

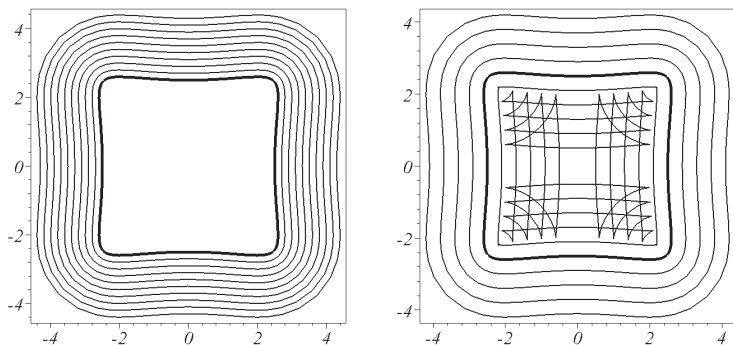


Рисунок 6.9 – Еквідистанти до кривої (6.10):  
 $a$  – зовнішні;  $b$  – сумісні з внутрішніми

Для опису прямокутника у неявному вигляді  $f(x,y) = 0$  використаємо  $R$ -диз'юнкцію (символ " $\vee$ ") і  $R$ -кон'юнкцію (символ " $\wedge$ ").

**Твердження 6.2.** Прямокутник розміром  $\{[a,b] \times [c,d]\}$  описується за допомогою  $R$ -функцій рівнянням у неявному вигляді:

$$f(x,y) \equiv \sqrt{((a \vee x) - (b \wedge x))^2 + ((c \vee y) - (d \wedge y))^2} = 0, \quad (6.11)$$

де  $f(x,y) = \text{const}$  є рівнянням сім'ї еквідистант прямокутника.

Після спрощення рівняння (6.11) має вигляд:

$$f(x,y) \equiv 0,5 \sqrt{(a-b + |a-x| + |b-x|)^2 + (c-d + |c-y| + |d-y|)^2} = 0. \quad (6.12)$$

На рис. 6.10 зображено різні ракурси графіка функції  $z=f(x,y)$ .

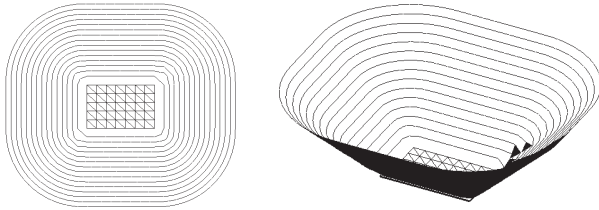


Рисунок 6.10 – Різні ракурси графіка функції (6.11)

За допомогою тверджень 6.1 і 6.2 визначається відстань між "прямокутником" (контейнером) і "квадратом" (профілем будівельної колони).

**Твердження 6.3.** Якщо вирази для  $x$  і  $y$  з формули (6.10) обрати аргументами функції (6.11), то утвориться функція  $z(t) = f(x(t), y(t))$ , мінімальне значення якої дорівнюватиме відстані між "прямокутником" і "квадратом".

Мінімальне значення функції  $z(t)$  бажано обчислювати методом, який не потребує обчислення похідних.

Пояснити *геометричну суть твердження 6.3* можна на основі способу визначення відстані між "прямокутниками" (контейнерами).

**Твердження 6.4.** Нехай для двох прямокутників за допомогою  $R$ -функцій складено рівняння  $f_1(x,y) = 0$  та  $f_2(x,y) = 0$  типу (6.11). Тоді мінімальна відстань між прямокутниками дорівнює подвоєному мінімальному значенню  $R$ -диз'юнкції:

$$f_1(x,y) \vee f_2(x,y) = 0,5 \cdot (f_1(x,y) + f_2(x,y) + |f_1(x,y) - f_2(x,y)|).$$

Для *геометричного пояснення твердження 4* розглянемо графіки функцій  $z=f_1(x,y)$  і  $z=f_2(x,y)$  (рис. 6.11).

Графік  $R$ -диз'юнкції  $f_1 \vee f_2$  має вигляд об'єднання зони перетину графіків функцій  $z=f_1(x,y)$  і  $z=f_2(x,y)$  (рис. 6.12).

Твердження 6.4 наголошує на тому, що подвоєна відстань від "найнижчої" точки  $A$  графіка  $R$ -диз'юнкції до координатної площини  $Oxy$  (точки  $B$ ) дорівнюватиме мінімальній відстані між прямокутниками.

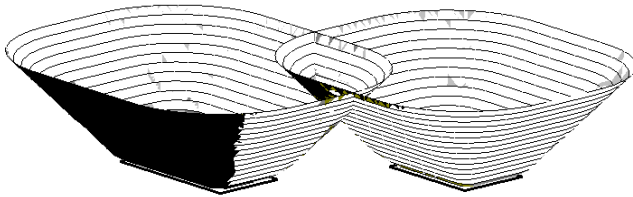


Рисунок 6.11 – Графіки функцій  $z=f_1(x, y)$  і  $z=f_2(x, y)$

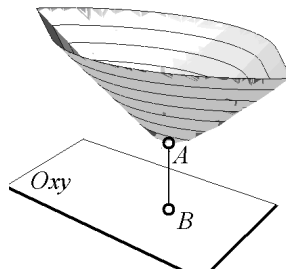


Рисунок 6.12 – Графік  $R$ -диз'юнкції  $f_1 \vee f_2$

Наочно це можна показати шляхом зведення до плоского випадку. Для цього розглянемо перерізи графіків функцій  $f_1(x, y)=0$  і  $f_2(x, y)=0$  площиною, що проходить через точку  $B$  мінімуму  $R$ -диз'юнкції перпендикулярно до площини  $Oxy$  (рис. 6.13).

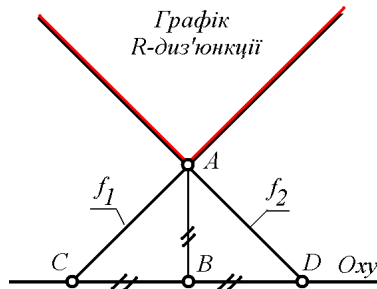


Рисунок 6.13 – Перерізи графіків функцій площиною, що проходить через точку мінімуму  $R$ -диз'юнкції

З властивостей функцій  $f_1$  і  $f_2$  маємо, що  $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ . Тоді  $|AB| = |BD| = |CB|$  і  $|CD| = 2|AB|$ . Тобто мінімальна відстань  $|CD|$  дорівнює подвоєному мінімальному значенню  $2|AB|$ .

Ці результати покладено в основу алгоритму вибору шляху мобільного робота на площині серед перешкод з прямокутниками в плані. Наведемо фрагмент алгоритму, який стосується обчислення "зазору" між геометричними об'єктами у околі їх зближення. Це дозволить відповісти на запитання: чи пройде в цьому місці "робот" у вигляді круга радіуса  $\epsilon$ ?

Для цього визначається відстань між парами прямокутників, і в точці екстремуму будуються гістограми відстаней між ними. На рис. 6.14 як приклад наведено три прямокутники. Значення "висот" гістограм  $\min_{12}$ ,  $\min_{23}$  і  $\min_{13}$  дорівнюють мінімальній відстані між прямокутниками 1 і 2, 2 і 3, а також 1 і 3. У випадку, коли одержимо відрізок екстремальних точок, то обираємо середину відрізка.

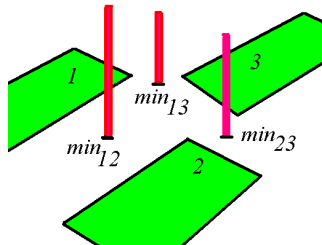


Рисунок 6.14 – Приклад прямокутників та гістограм, побудованої в точках екстремуму

Таким чином, в околі обраного прямокутника в обчислених екстремальних точках будуються відповідні гістограми відстаней між парами найближчих прямокутників. Виконавши це для всіх прямокутників, на площині  $Oxy$  одержується множина гістограм. Аналізуючи послідовність значень висот гістограм визначається, чи існує шлях, який забезпечить проходження між заданими точками "робота" у вигляді круга радіуса  $\epsilon$ .

Описаний спосіб покладено в основу алгоритму вибору шляху переміщення мобільного робота на площині серед перешкод у вигляді прямокутників в плані (контейнерів, автомобілів тощо).



### 6.2.2. Геометрична інтерпретація методу потенціалів для пояснення трасування шляху робота

Геометрична інтерпретація методу потенціалів пояснює трасування шляху робота в "незнайомому" середовищі після аварії (катастрофи), топографічну схему про яке одержано засобами аеросканування.

При виконанні аварійно-рятувальних дій в середовищах, шкідливих для людини, доцільно застосовувати роботів. Дійсно, мобільні роботи незамінні при ліквідації аварій на атомних реакторах, пожежах на хімічних виробництвах, розмінуванні вибухонебезпечних предметів тощо. Бажано, щоб керування роботами здійснювалося в автоматичному режимі за умови попередньої постановки задачі. При цьому робот сам повинен орієнтуватися в незнайомій обстановці, яку визначено топографічним аероскануванням місцевості. Тобто актуальним буде розробка математичного наповнення алгоритму визначення шляху переміщення робота з метою виконання поставленої задачі.

*Ідея геометричної інтерпретації методу потенціалів* полягає у побудові графіка функції двох змінних на топографічній схемі з наслідками катастрофи. На рис. 6.15 такі наслідки умовно позначено двома зафарбованими фігурами. Зазначена функція двох змінних повинна мати специфічні властивості. А саме, в точці цілі функція повинна мати глобальний мінімум, а на контурах перепон функція повинна різко зростати (рис. 6.16).

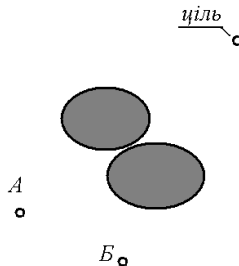


Рисунок 6.15 – Топографічна схема місцевості після аварії

---

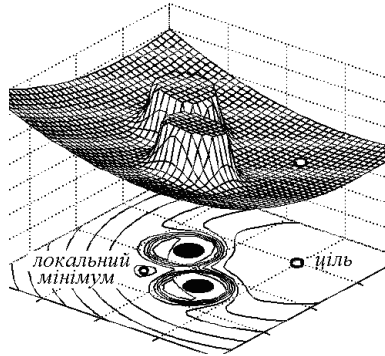


Рисунок 6.16 – Графік функції потенціалу, побудованої на топографічній схемі

Тоді *процес трасування руху робота по топографічній схемі* можна формально пов'язати з рухом кульки в полі тяжіння по поверхні графіка функції потенціалу. А саме – *траса руху робота буде ортогональною проекцією на площині топографічної схеми траєкторії руху кульки*. Мовою математики, це зводиться до пошуку проміжних точок на графіку функції потенціалу, на шляху до глобального мінімуму. Цей пошук можна здійснити готовими програмами мінімізації функції двох змінних.

Задача ускладнюється, якщо існують інші точки мінімуму потенціальної функції, які є відмінними від точки цілі траєкторії руху. Наприклад, для точки *A* (рис. 6.15), кулька скотиться до точки локального мінімуму, і тоді необхідні додаткові дії алгоритму; на відміну від точок вигляду *B*, для яких алгоритм буде виконуватися стабільно.

Отже, *для визначення траєкторії руху робота з використанням віртуальної потенціальної функції* слід вважати, що в кінцевій точці траєкторії знаходиться мінімум зазначеної функції – тобто *кінцевою є точка, що притягує*, а також, *перепони на шляху робота* слід розглядати як пагорби високого потенціалу, що *створюють силу відштовхування*.

Тобто вважається, що робот – це кібернетичний об'єкт, який спроможний відслідковувати від'ємний градієнт повного потенціалу поля, який забезпечить на трасі руху досягання кінцевої точки як найнижчого пункту в потенціальному полі.

На мнемонічному рівні процес побудови потенціальної функції пояснюється як результат додавання двох функцій: першої – гладкої з єдиним глобальним мінімумом, другої – гладкої функції з різким зростанням в околі контурів зображень перепон (рис. 6.17).

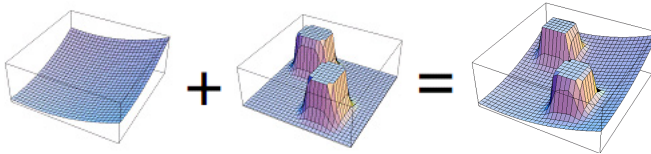


Рисунок 6.17 – Мнемонічна схема побудови віртуальної потенціальної функції

На аналітичному рівні віртуальна потенціальна функція виражається повним потенціалом:

$$U_{Total}(q) = U_{Att}(q) + U_{Rep}(q), \quad (6.13)$$

де  $U_{Att}(q)$  – визначає поле притягання;  $U_{Rep}(q)$  – визначає поле відштовхування для  $q = [x, y]^T$  – точок площини.

Опис *потенціального поля притягання* задається виразом:

$$U_{Att}(p) = 1/2\xi \left\| q_{Tar} - q_{Rob} \right\|^m,$$

де  $\xi$  – додатний коефіцієнт;  $q_{Tar}$  і  $q_{Rob}$  визначають позиції для цілі і робота, відповідно;  $\left\| q_{Tar} - q_{Rob} \right\|$  – евклідова відстань між роботом і ціллю, яка є тільки функцією позиції;  $m > 0$ .

*Графік потенціальної функції притягання* матиме вигляд гладкої поверхні з екстремальною точкою мінімуму (рис. 6.18).

*Потенціальні функції відштовхування* створюють високий потенціал навколо перепон, що забезпечує потоки, далекі від перепон.

Опис *потенціального поля відштовхування* (у тому числі і для витягнутої фігури) задається виразом:

$$U_{Rep}(q) = \begin{cases} 1/2\eta(1/\rho_{RO} - 1/\rho_0)^2 \rho_{RT}^n, & \text{if } \rho_{RO} \leq \rho_0 \\ 0, & \text{if } \rho_{RO} > \rho_0, \end{cases}$$

де  $\eta$  – додатній параметр,  $\rho_{RO}$  – мінімальна евклідова відстань від робота до перепони,  $\rho_0$  – константа врахування впливу перешкод,  $\rho_{RT}$  – константа, що впливає на "пологість" графіка функції,  $n > 2$ .

Потенціальна функція відштовхування повинна мати сферичну симетрію для запобігання створення локальних мінімумів великими відстанями трасування. Крім того, градієнт потенціалу навколо перепони має коригуватися з зовнішнім контуром і бути безперервним.

*Графік потенціальної функції відштовхування* матиме вигляд гладкої поверхні, яка різко зростає біля контурів зображень перепон (рис. 6.19).

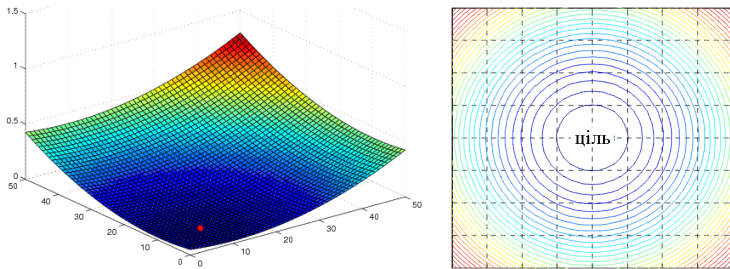


Рисунок 6.18 – Графік і лінії рівня потенціальної функції притягання

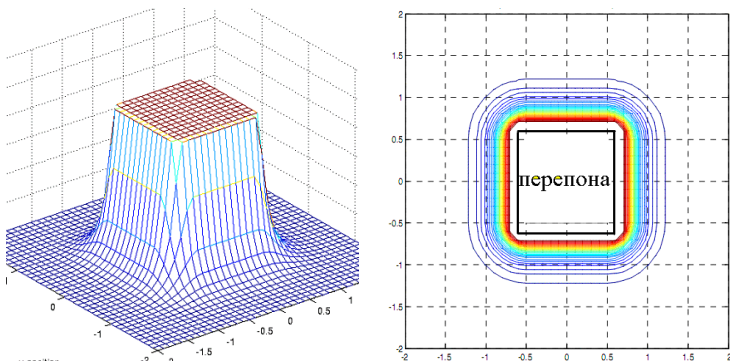
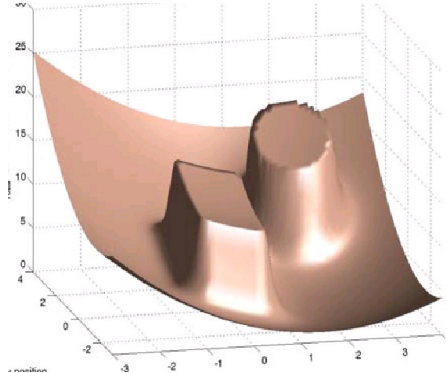
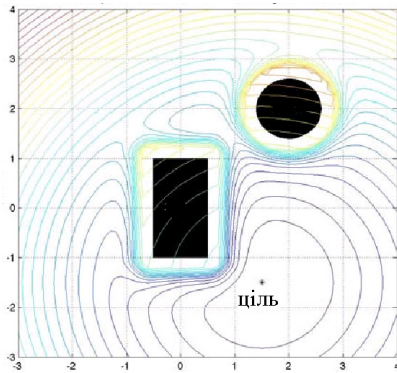
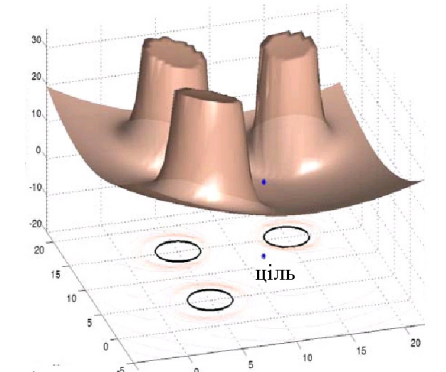
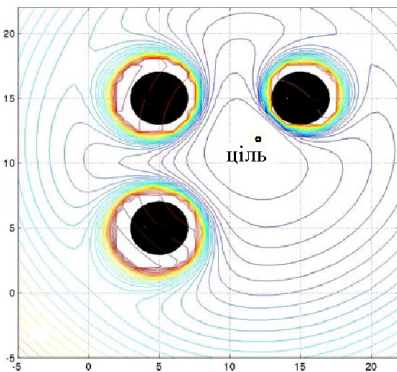


Рисунок 6.19 – Графік і лінії рівня потенціальної функції відштовхування

На рис. 6.20, *а*, *б* зображено приклади віртуальних потенціальних функцій залежно від відносного розташування цілі та перепон.



*а*

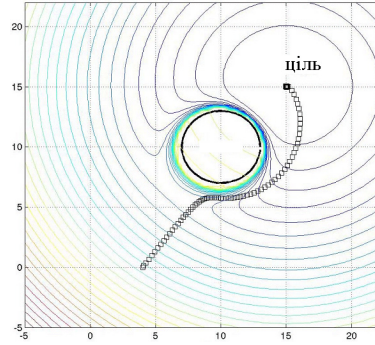
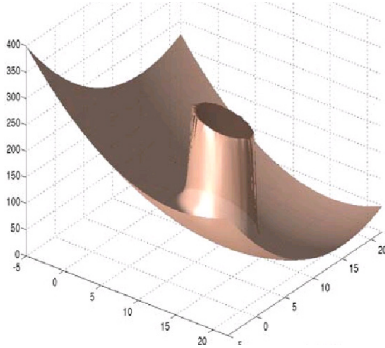


*б*

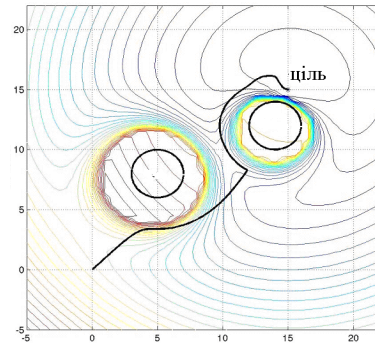
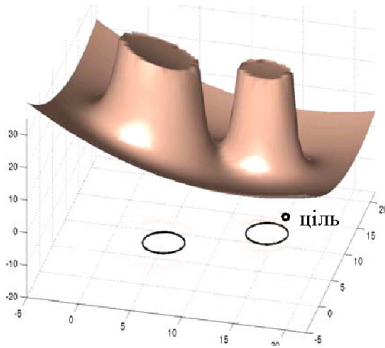
Рисунок 6.20 – Приклади потенціальних функцій: *а* – ціль знаходиться за перепонами; *б* – ціль знаходиться між перепонами

На рис. 6.21, *а-в* зображено приклади побудови траси переміщення робота.

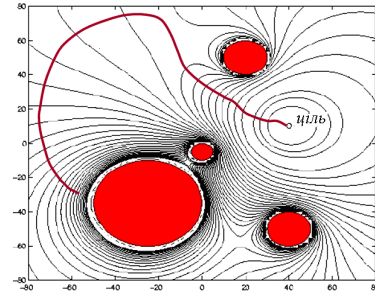
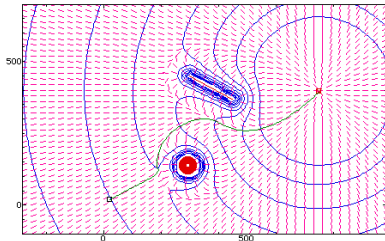
Геометрична інтерпретація методу потенціалів суттєво спрощує пояснення процесу автоматичного трасування шляху робота в середовищі топографічної схеми з наслідками аварії чи катастрофи.



*a*



*б*



*в*

Рисунок 6.21 – Тестові приклади побудови траси переміщення робота: *a* – обхід однієї перепони; *б* – складний обхід двох перепон; *в* – трасування руху робота в автоматичному режимі

### 6.3. Геометричне моделювання поведінки динамічних систем

Одним з головних математичних інструментів для оцінки міри хаотичності динамічних систем є поняття спектру показників Ляпунова. Різні параметри хаотичної поведінки таких систем відповідають різним циклічним траєкторіям. Геометричний зміст показників Ляпунова використовується для порівняння моделей хаотичної поведінки динамічної системи на якісному рівні.

При проєктуванні високотехнологічних виробів необхідно враховувати вплив на речовини не тільки градієнтів тиску та швидкості, але ще й градієнтів температури. При цьому в рідині мають проявлятися ефекти теплової конвекції. 19 року французький дослідник Бенар, уперше експериментально продемонстрував початок теплової конвекції в прошарку розплавленого спермацету – дуже в'язкої, подібної до воску, речовини, яка плавиться при температурі 53–54 градусів за Цельсієм.

Пояснити *ефект Бенара* можна таким чином. Нехай є горизонтальний прошарок рідини нескінченної довжини. Знизу його підігривають, завдяки чому підтримується температурний градієнт. Виражений у певних безрозмірних одиницях, цей градієнт визначається *числом Релея*  $\mathfrak{R}$ . Поки число Релея є не занадто великим, рідина залишається спокійною, а тепло переноситься за рахунок теплопровідності. Однак, якщо  $\mathfrak{R}$  перевершує деяке певне значення, у рідині виникає конвективний рух. Конвективні структури досить регулярні і можуть утворювати або циліндричні, або гексагональні конфігурації. На рис. 6.22 подано вид зверху на конвективні комірки, геометрично ці комірки – шестикутники. Рідина піднімається вгору в центрі комірки й опускається донизу на її границі (або навпаки) (рис. 6.23).

В галузі гідродинаміки завданням є знайти пояснення механізму цього раптового переходу типу "хаос – порядок" і спрогнозувати форми та стійкості комірок. Основні фізичні величини в цій задачі (*комірки Бенара*) – це поле швидкостей в точці простору  $x, y, z$ , тиск  $p$ , температура  $T$ . Поле швидкостей, тиск і температура підкоряються певним нелінійним рівнянням гідродинаміки, які можна привести до вигляду з явною залежністю від числа Релея  $\mathfrak{R}$ , що задається ззовні.

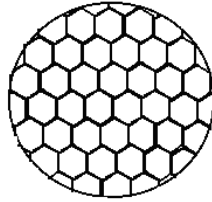


Рисунок 6.22 – Приклад комірок Бенара

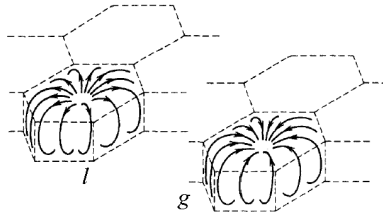


Рисунок 6.23 – Принцип формоутворення комірок Бенара

Опис моделі конвекції в прошарку рідини, що підігрівається знизу, допомагає здійснити *система диференціальних рівнянь Лоренца*:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ. \end{aligned} \tag{6.14}$$

В системі рівнянь (6.14) керуючим параметром є число Рейнольдса  $r$ , а значення числа Прандтля  $\sigma$  і параметра  $b$  вважаються:  $b=8/3$ ,  $\sigma=10$ .

Аналіз розв'язків системи рівнянь Лоренца потрібний для визначення утворення й руйнування *структур Бенара*. Графоаналітичні методи використовуються для забезпечення наочності проведення такого аналізу.

Спочатку розв'язується система нелінійних рівнянь Лоренца. Головною особливістю *атрактору Лоренца* є те, що витки фазової траєкторії *непередбачуваним чином* намотуються на лівий чи пра-



вий фокус. Система координатних криволінійних поверхонь, які розділяють гілки кривих атратора Лоренца, дозволяє на аналітичному рівні визначати початок якісних змін в його поведінці. Для відмежування процесу від хаотичності є геометричний спосіб визначення показників Ляпунова як міри хаотичності системи Лоренца. Цей спосіб дозволяє наочно порівнювати степені хаотичності систем Лоренца залежно від вхідних параметрів.

Хаотичні процеси в детермінованих нелінійних системах – одна з фундаментальних проблем сучасного природознавства. В таких системах причина генерування складних коливальних процесів криється не у великій кількості ступенів свободи і не в наявності *флуктуацій*, а в *експонентній нестійкості режимів*. Можливість подібних явищ розумів і передбачав А. Пуанкаре. У нестійких системах "зовсім незначна причина, що вислизає від нас через свою малість, викликає значну дію, яку ми не можемо передбачити. ...Пророкування стає неможливим, ми маємо перед собою явище випадкове", – так писав А. Пуанкаре ще в 1908 р у книзі "Наука і метод". Розвиток ідей Пуанкаре призвело до створення фундаменту *хаотичної динаміки детермінованих систем*.

Необхідною *умовою виникнення хаосу* в динамічних системах є розмірність фазового простору  $N \geq 3$ , тобто коли стан системи характеризується мінімум *трьома змінними*.

У системах із *двома змінними* стану, фазовим простором яких служить двовимірна площина, можливі динамічні режими вичерпуються станами рівноваги та періодичних коливань (граничними циклами).

Наявність циклічних фазових траєкторій розв'язків системи Лоренца може служити ознакою її *слабкої хаотичності*. При цьому, в системах із двома змінними стану можливі динамічні режими є рівновага або періодичні коливання (граничні цикли).

Принципово інша ситуація, якщо стан динамічної системи характеризується трьома незалежними змінними (фазовими координатами). Тут можливі два варіанти:

- 1) траєкторія через кінцевий час замкнеться, демонструючи наявність складного, але періодичного процесу;
- 2) траєкторія буде відтворювати якийсь аперіодичний процес, якщо при  $t \rightarrow \infty$  замикання не відбудеться.

Другий випадок відповідає режиму *детермінованого хаосу*. Дійсно, працює *основний принцип детермінізму*: майбутнє однозначно визначене початковим станом.

Однак процес *еволюції системи* складний, неперіодичний. На перший погляд, зовні він нічим не відрізняється від випадкового. Але при більш детальному аналізі з'ясовується одна важлива відмінність цього процесу від випадкового – *цей процес можна відтворити*. Дійсно, повторивши ще раз початковий стан, завдяки детермінованості ми знову відтворимо ту ж саму траєкторію незалежно від ступеня її складності.

Цей неперіодичний процес не є хаотичним у сенсі визначення хаосу, наведеного вище. Це складний і схожий на випадковий, але проте детермінований процес. Тут важливо те, що він характеризується *нестійкістю*, і ця обставина дозволяє зрозуміти ще одну принципово важливу властивість систем з детермінованим хаосом – *перемішування*.

Розглянемо стійкі режими руху в детермінованих динамічних системах, у яких є втрати енергії (їх називають *дисипативними*). Як початковий стан оберемо не точку  $x^0$  з певними координатами в просторі станів, а малу сферу радіуса  $\epsilon > 0$ , що оточує цю точку. Будь-яка точка всередині сфери характеризує мале відхилення від  $x^0$ . Сфера включає сукупність можливих відхилень від вихідного стану, що не перевищують по модулю  $\epsilon$ .

Далі простежимо за трансформацією цієї сфери в часі вздовж траєкторії. *Через стійкість обраного режиму будь-яке мале відхилення з часом повинне згасати!* Це означає, що під впливом детермінованого закону еволюції кулька радіуса  $\epsilon$  в часі буде зменшуватися, і при  $t \rightarrow \infty$  її радіус зменшиться до нуля. Це ілюструє рис. 6.24. *Початковий фазовий об'єм у дисипативних системах з часом зменшується.*

В *нестійкій лінійній системі* за умови нестійкого вхідного режиму фазовий об'єм може збільшуватися нескінченно.

В *нестійкій нелінійній дисипативній системі* процес еволюції початкового малого фазового об'єму буде нетривіальним. Дійсно, по-перше, нестійкість режиму веде до зростання збурень, а, по-друге, – дисипативні системи поза залежністю від виду стійкості викликають зменшення елемента фазового об'єму в часі до нуля, що обумовлено втратами енергії.

---

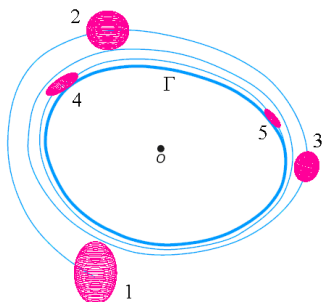


Рисунок 6.24 – Стиснення первісної області невизначеності 1 в часі у випадку, коли цикл  $\Gamma$  є стійким граничним режимом

Як сполучити ці два фактори? Існує єдине рішення зазначеної дилеми: *елемент фазового об'єму за деякими напрямками повинен розтягуватися, а за іншими – стискатися*. Причому ступінь стискання, в середньому, має обов'язково переважати над ступенем розширення, щоб у результаті фазовий об'єм у часі зменшувався. У нелінійних дисипативних системах це виявляється можливим.

Через наявність механізму нелінійного обмеження кожна траєкторія складного режиму коливань зосереджена в обмеженій області фазового простору. При цьому будь-який малий окіл вхідного (початкового) фазового об'єму в результаті переміщується по всій області, зайнятої траєкторією.

Цей процес стає зрозумілішим через аналогію. У склянку з водою помістимо маленьку чайнку та розмішаємо воду ложкою, спричинивши нестійкість. Чайнка буде при цьому рухатися складною спіралеподібною траєкторією, яка обумовлена рухом води в склянці. У будь-який заданий момент часу ми теоретично можемо зафіксувати координати розташування цієї чайнки в об'ємі води. Тепер замість чайнки помістимо в склянку з водою дуже маленьку крапельку чорнила і знову розмішаємо воду. В результаті чорнило практично рівномірно розчиниться у всьому об'ємі води, злегка її зафарбувавши. Тобто частки чорнила, які на початку такого "експерименту" зосереджені в маленькому об'ємі крапельки, за час перемішування можна буде виявити в будь-якій частині об'єму води в склянці.

У житті розглянутий процес називається перемішуванням. В математиці таке поняття також існує, і, з огляду на наведену фізичну інтерпретацію, воно виявляється близьким за змістом процесу в системі. Дійсно, потік води в склянці, створений рухом чайної ложки, можна інтерпретувати як чинність детермінованого закону, що визначає динамічну систему. Чайнка при цьому буде рухатися за складною, недетермінованою траєкторією. А крапелька чорнила, яку можна інтерпретувати як якийсь маленький об'єм у фазовому просторі навколо чайнки, переміщається по всьому об'ємі води.

Поняття *дивного атрактора*. Математичним образом режиму функціонування дисипативної динамічної системи є *атрактор* – гранична траєкторія точки у фазовому просторі, до якої спрямовано всі вхідні режими. Якщо вхідний режим є *стійким станом рівноваги*, то атрактор системи буде *нерухомою точкою*. Якщо вхідний режим є *стійким періодичним рухом*, то атрактором буде *замкнута крива*, яка має назву *граничного циклу*.

Раніше вважалось, що атрактор є образом винятково стійкого режиму функціонування системи. Зараз розуміють, що такий режим детермінованого хаосу є теж атрактором в сенсі визначення граничної траєкторії в обмеженій області фазового простору.

Однак такий атрактор має *дві істотні відмінності*:

- 1) траєкторія такого атрактора є неперіодичною (вона не замикається);
- 2) режим функціонування є нестійким (малі відхилення від режиму збільшуються).

Атрактори з наведеними відмінностями називаються *дивними*. Теоретично визначеним основним *критерієм дивності* атрактора є нестійкість траєкторії, яка має бути експоненціальною (за Ляпуновим). Тобто мале збурювання режиму  $D(0)$  повинне в часі збільшуватися за законом експоненти:

$$D(t) = D(0)\exp(\lambda t), \quad (6.15)$$

$$\text{де } \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)}.$$

Величина  $\lambda > 0$  вказує на експоненціальний нестійкий режим коливань і на наявність у системі перемішування. При цьому кожна координата стану залежить від часу не періодично; у спектрі коливань присутні всі частоти з деякого інтервалу (суцільний ляпуновський спектр потужності); автокореляційна функція спадає з часом. Вважалось, що такі характеристики пов'язані з випадковістю процесу. Проте подібні властивості має і процес, що підпорядкований детермінованим законам. Тому такий процес має назву *детерміновано-го хаосу*. До нього належить процес формування комірок Бенара.

Для визначення вхідних параметрів, за яких хаотичність системи буде меншою, необхідно вміти порівнювати (а для впровадження це важливо на якісному рівні) хаотичну поведінку системи за різних значень цих параметрів. Для цього використовується *геометричний зміст* поняття *спектру показників Ляпунова*.

Нехай є сім'я фазових траєкторій, що описані системою рівнянь (6.14) і які характеризуються ледь відмінними початковими умовами. Оберемо у фазовому просторі сім'ю точок, розташованих на поверхні кулі малого радіуса  $\epsilon$  з центром на траєкторії  $M\{x(t), y(t), z(t)\}$ . Кожна точка сім'ї за час  $T$  переміститься за своєю фазовою траєкторією в розташунок  $\{x(T), y(T), z(T)\}$ . Внаслідок цього куля візуально нібито деформується у еліпсоїд (поки розміри "хмари" точок ще можна вважати малими).

*Геометрична інтерпретація спектра ляпуновських показників* полягає в тому, що кожний із показників характеризує зміну масштабу вздовж однієї з головних осей еліпсоїда.

Нехай розміри еліпсоїда по трьох головних півосях в момент часу  $T$  будуть  $\{l_1, l_2, l_3\} = \{\epsilon \exp(\Lambda_1 T), \epsilon \exp(\Lambda_2 T), \epsilon \exp(\Lambda_3 T)\}$ . У випадку малих  $\epsilon$  і великих  $t$  саме величини  $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$  визначають спектр ляпуновських показників. Таким чином, кожний показник  $\Lambda$  відповідає за розширення або стиснення еліпсоїда точок вздовж однієї з його головних осей.

*Геометричний спосіб визначення ляпуновських показників.*

Необхідно обрати початкову точку  $M$ , обчислити координати множини точок поверхні сфери радіуса  $\epsilon$  з центром у точці  $M$ , та відповідних до них точок, які утворять поверхню еліпсоїда за час  $T$ .

На рис. 6.25 наведено зображення кулі і відповідного їй еліпсоїда для  $\epsilon = 0,1$  і  $T = 0,1$ .

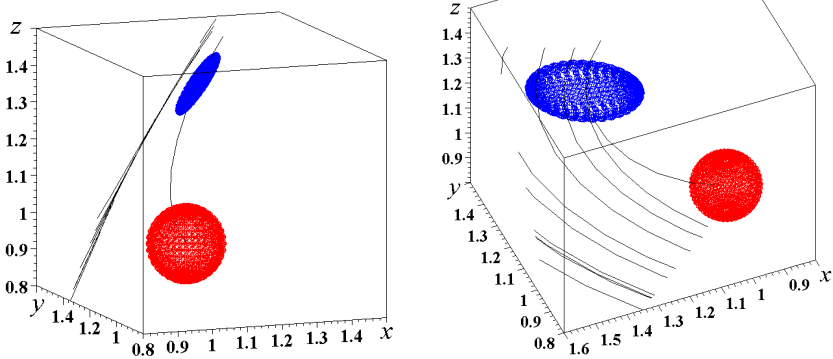


Рисунок 6.25 – Різні ракурси еліпсоїда, в який деформувалася куля за час  $T$

Значення великої осі еліпсоїда формально обчислюється як максимальна відстань між точками, що належать еліпсоїду (у даному випадку це буде 0,48). Те ж саме можна здійснити для інших вхідних параметрів системи. Порівняння розмірів великих осей еліпсоїдів надає оцінку ступеня хаотичності системи, а саме – *більш хаотичною слід вважати систему, у якій розмір великої осі еліпсоїда буде більшим*.

**Приклад 6.1.** Нехай маємо дві системи Лоренца з вхідними параметрами. Перша система має "класичні" вхідні параметри  $\sigma = 10$ ;  $b = 8/3$ ;  $r = 28$ . Друга система має "інші" вхідні параметри  $\sigma = 6,98$ ;  $b = 3,96$ ;  $r = 41,51$ . На рис. 6.26 наведено порівняння відповідних еліпсоїдів Ляпунова. За розмірами еліпсоїда видно, що другий випадок (рис. 6.26, б) більш схильний до хаосу.

Отже, поведінка нелінійної системи у фазовому просторі визначається геометричним об'єктом – *атрактором*. Існують два різновиди атракторів. Перший пов'язаний з нерівновагим порядком і відображається у фазовому просторі точкою (*фокусом*), або замкнутою кривою (*граничний цикл*). Другий вид пов'язаний з утворенням детермінованого хаосу й відображається обмеженою областю фазового простору, заповненою неперервною траєкторією, що розвивається в часі (*дивний атрактор*).

Для *атракторів першого виду* траєкторії процесу розвиваються в такий спосіб. Якщо система стійка, траєкторія виходить із початкової точки й закінчується або фокусом (стійкий фокус), або

граничним циклом (стійкий граничний цикл). Якщо система нестійка, траєкторія починається або фокусом (нестійкий фокус), або граничним циклом (нестійкий граничний цикл) і віддаляється від свого атратора.

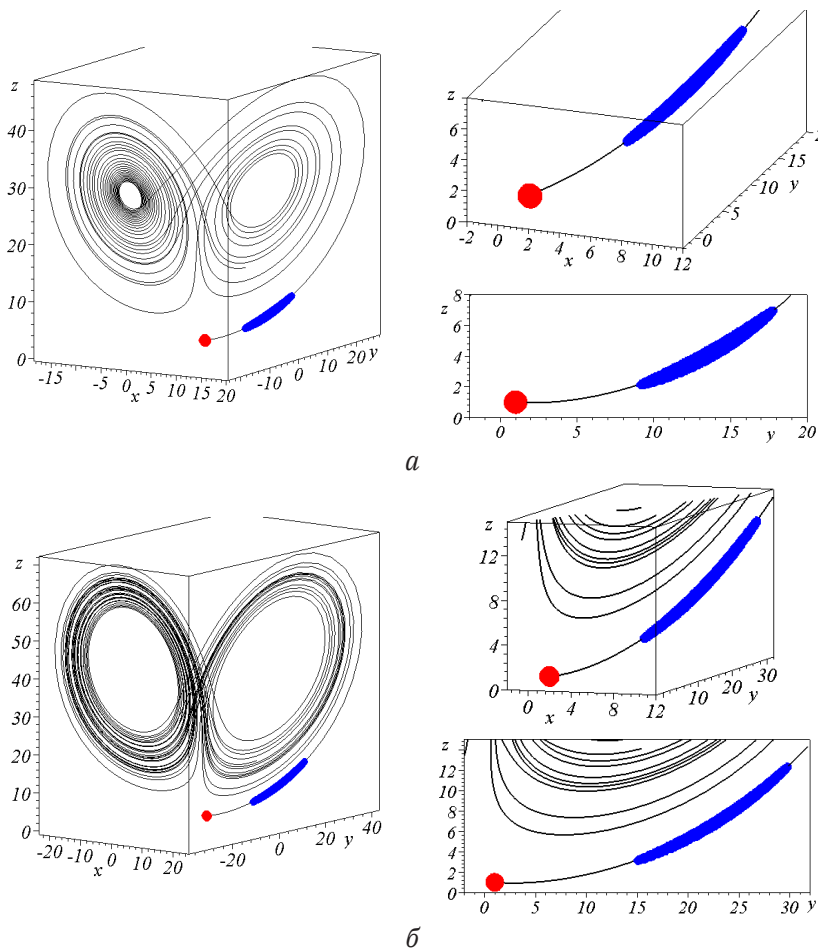


Рисунок 6.26 – Ляпуновські еліпсоїди для "класичних" (а) та "інших" (б) наборів вхідних параметрів системи Лоренца

Для *атракторів другого виду*, тобто коли процес відображається "дивним атрактором", траєкторія його еволюції починається з початкової точки й поступово заповнює деяку область фазового простору.

Переходи "порядок – хаос" у термінах атракції означають перехід від атрактора першого виду (фокуса, або граничного циклу) до атрактора другого виду (дивного атрактора).

#### **6.4. Моделювання поверхні нерухомого відбивача у випадку рухомого джерела променів**

Сонячне випромінювання є ефективним джерелом поновлювальної енергії. Для концентрації сонячних променів у певних областях простору застосовують відбивачі. При цьому для відстеження розташування сонця при його добовому (і сезонному) переміщенні необхідні спеціальні механічні пристрої. Але наявність механічного "навігатора" підвищує вартість геліоустановки, а часом і знижує її надійність. Уникнути такої проблеми допомагає розв'язання задачі *пошуку форми нерухомого відбивача*, який був би здатний зосередити відбиті промені в задалегідь заданій області простору за умови, що *точкове джерело променів змінює свій розташунок відносно відбивача*.

В розв'язання задач геометричного моделювання форм відбивачів у галузі сонячної енергетики суттєвий внесок зробив О. Л. Підгорний та його наукова школа. Він є автором універсальної геометричної моделі надходження сонячних променів в задану точку простору з можливістю варіювати широтою місцевості та порою року (добовим конусом сонячних променів). Цю модель було покладено в основу низки досліджень, пов'язаних з розрахунками параметрів сонячного випромінювання. Важливим доповненням до цих робіт є результати досліджень Л. М. Куценка і його учнів. Розроблений ними аналітичний опис відбивальної поверхні призначений для складання ефективних комп'ютерних алгоритмів розрахунку геліосистем.

Задача формулюється таким чином. *Скласти рівняння поверхні нерухомого відбивача, здатного зосередити відбиті промені в задалегідь заданому місці простору, незважаючи на переміщення джерела променів відносно поверхні відбивача.*



Оберемо розташунок нерухомої прямокутної системи координат  $Oxyz$  таким чином, щоб джерело променів протягом доби рухалось в межах координатної площини  $Oxz$ . Вважатимемо, що система координат  $OXYZ$  є рухомою і пов'язана з переміщенням джерела променів. Спочатку сумістимо її з нерухомою системою координат  $Oxyz$  (щоб збіглися "однойменні" осі обох систем), а потім здійснимо її оберт навколо осі  $Oy$  на кут  $t$ . Такий оберт описується рівняннями:

$$\begin{aligned} X &= x \cos t + z \sin t; \\ Y &= y; \\ Z &= -x \sin t + z \cos t. \end{aligned} \tag{6.16}$$

В рухомій системі координат  $OXYZ$  задамо параболоїд обертання з фокусом в початку координат і з віссю обертання  $OZ$ :

$$\begin{aligned} X &= v \cos u; \\ Y &= v \sin u; \\ Z &= \frac{v^2}{2p} - \frac{p}{2}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

де  $p$  – параметр форми параболоїда.

Вважатимемо, що завдяки переміщенню рухомої системи координат  $OXYZ$  параболоїд обертання своєю віссю  $OZ$  "відстежуватиме" переміщення джерела променів, де кут-параметр  $t$  – змінюється в межах  $t_{\text{MIN}} \leq t \leq t_{\text{MAX}}$ . Шукана поверхня відбивача буде збігатися з *обвідною миттєвих розташуноків сім'ї конфокальних параболоїдів обертання* – тобто параболоїдів обертання зі спільним фокусом. Спільний фокус і буде тим заздалегідь заданим місцем простору, де мають зосередитись відбиті промені.

Складемо рівняння параметричної сім'ї конфокальних параболоїдів обертання. Для цього з виразів (6.16) і (6.17) запишемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} v \cos u &= x \cos t + z \sin t; \\ v \sin u &= y; \\ \frac{v^2}{2p} - \frac{p}{2} &= -x \sin t + z \cos t. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Після розв'язання системи рівнянь (6.18) відносно  $x, y$  і  $z$ , одержуємо рівняння параболоїда обертання з фокусом в початку координат, повернутого навколо осі  $Oy$  на кут  $t$ :

$$\begin{aligned}x &= v \cos t \cos u + \frac{p^2 - v^2}{2p} \sin t; \\y &= v \sin u; \\z &= v \sin t \cos u - \frac{p^2 - v^2}{2p} \cos t.\end{aligned}\tag{6.19}$$

На рис. 6.27 при значенні параметра форми параболоїда  $p = 2$  зображено сім'ю конфокальних параболоїдів, повернутих навколо осі  $Oy$  залежно від кута  $t$ , яка побудована за допомогою формул (6.19).

Для опису обвідної поверхні сім'ї зазначених конфокальних параболоїдів, складається і розв'язується система рівнянь. Для складання системи рівнянь сумісно розглядається вирази (6.19) і якобіан:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)}.\tag{6.20}$$

В результаті обчислень одержуємо значення якобіана:

$$J = -\frac{v^2(p^2 + v^2)}{2p^2} \cos u.\tag{6.21}$$

З рівняння  $J = 0$  відносно параметра  $u$  одержуємо корінь  $u = \pi/2$ . Підставивши знайдене значення  $u = \pi/2$  у формули (6.19), одержуємо рівняння обвідної поверхні у вигляді:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{v^2 - p^2}{2p} \sin u; \\y &= v; \\z &= \frac{v^2 - p^2}{2p} \cos u.\end{aligned}\tag{6.22}$$

На рис. 6.28 при  $p = 2$  зображено обвідну сім'ї конфокальних параболоїдів, повернутих навколо осі  $Oy$ , яка побудована за допомогою формул (6.22).

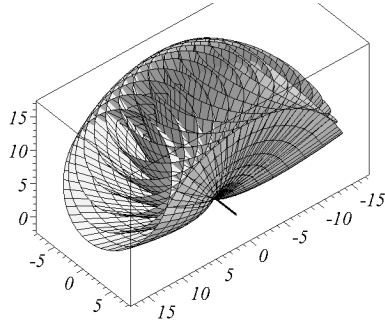


Рисунок 6.27 – Сім'я параболоїдів, повернутих навколо осі  $Oy$

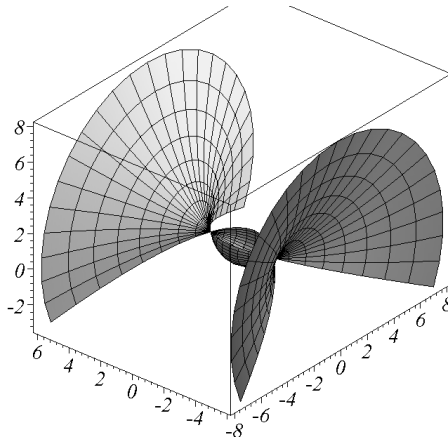


Рисунок 6.28 – Обвідна сім'ї параболоїдів, повернутих навколо осі  $Oy$

За необхідності описи поверхонь (6.19) і (6.22) можна одержати і в явному вигляді  $z = F(x, y)$ .

Опис "нижньої" поли параболоїда (6.19) при його крайніх положеннях одержується, якщо вилучається з рівняння:

$$x \sin t - z \cos t + \frac{(x \cos t + z \sin t)^2 + y^2}{2p} - \frac{p}{2} = 0 \quad (6.23)$$

змінна  $z$ , і вибором знаку перед радикалом забезпечується опис саме "нижньої" поли:

$$z = \frac{(p - x \sin t) \cos t - \sqrt{p^2 - 2px \sin t - y^2 \sin^2 t}}{\sin^2 t}. \quad (6.24)$$

Опис "верхньої" поли поверхні обертання (6.22) одержується, якщо вилучається з рівняння:

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{y^2}{2p} - \frac{p}{2} \quad (6.25)$$

змінна  $z$ , і вибором знаку перед радикалом забезпечується опис саме "верхньої" поли:

$$z = 1/2p \sqrt{(y^2 + 2px - p^2)(y^2 - 2px - p^2)}. \quad (6.26)$$

Застосування на практиці опису повернутого параболоїда з "класичною" параметризацією у вигляді (6.17) є незручним. А саме – за такої параметризації з допомогою формул (6.19) не вдається описати "половину" параболоїда традиційним шляхом вибору меж зміни параметра  $u$ .

Інша параметризація вирішує зазначену проблему. Завдяки їй рівняння параболоїда обертання має вигляд:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{v^2 - u^2}; \\ Y &= u; \\ Z &= \frac{v^2}{2p} - \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Поеднуючи ці рівняння з виразами (6.16), одержується система рівнянь:

$$\begin{aligned} \sqrt{v^2 - u^2} &= x \cos t + z \sin t; \\ u &= y; \\ \frac{v^2}{2p} - \frac{p}{2} &= -x \sin t + z \cos t. \end{aligned} \quad (6.28)$$


---

Після розв'язання системи рівнянь (6.28) відносно  $x, y$  і  $z$ , одержуємо нову форму рівняння параболоїда обертання з фокусом в початку координат, повернутого навколо осі  $Oy$  на кут  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2p}[(v^2 - p^2)\sin t \mp 2p\cos t\sqrt{v^2 - u^2}]; \\ y &= u; \\ z &= \frac{1}{2p}[(v^2 - p^2)\cos t \pm 2p\sin t\sqrt{v^2 - u^2}]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Тут верхні знаки необхідно обирати за від'ємних значень параметра  $t$ , а нижні – за додатних значень параметра  $t$ .

На рис. 6.29 зображено два "крайні" розташування половинок параболоїда обертання, побудованих за допомогою формул (6.29) при значеннях параметра  $t = \pm 1$ . Нерівності кромки поверхонь є проявом ефекту "вертикальної" дотичної площини, типовим для комп'ютерних зображень.

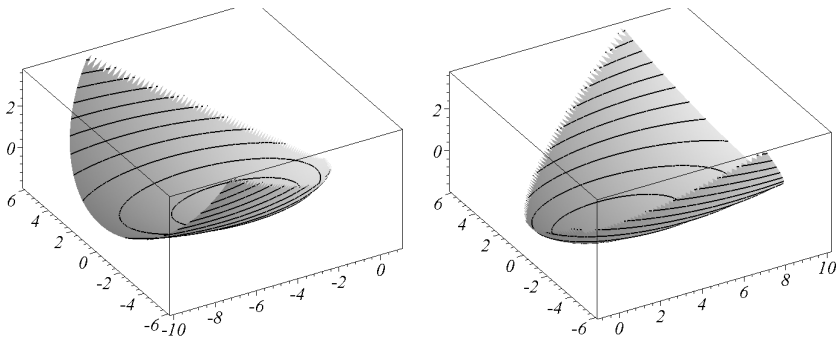


Рисунок 6.29 – Два "крайні" розташування половинок параболоїда обертання

Шукана відбивальна поверхня, що забезпечить концентрацію відбитих променів в конфокальній області, повинна складатися з трьох частин (рис. 6.30). А саме – з двох фрагментів початкового параболоїда обертання (позиції 1 і 2) при значеннях параметра

$t=t_{\text{MIN}}$  і  $t=t_{\text{MAX}}$ , а також з частини поверхні (позиція 3) – обвідної параметричної сім'ї конфокальних параболоїдів обертання.

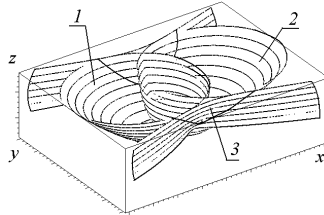


Рисунок 6.30 – Складові елементи очікуваної форми відбивача:  
 1 – фрагмент початкового параболоїда обертання при  $t=t_{\text{MIN}}$ ;  
 2 – фрагмент початкового параболоїда обертання при  $t=t_{\text{MAX}}$ ;  
 3 – обвідна параметричної сім'ї конфокальних параболоїдів обертання

На рис. 6.31 наведено аксонометричне зображення відбивальної поверхні із зазначеними властивостями, побудованої за формулами (6.22) і (6.29).

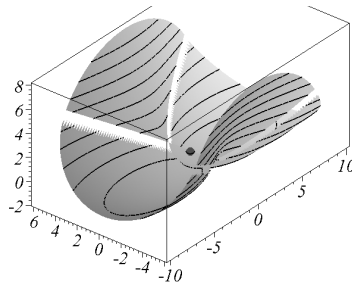


Рисунок 6.31 – Аксонометричне зображення відбивальної поверхні

Опис нерухокої відбивальної поверхні, яка дозволяє концентрувати відбиті промені в заздалегідь заданій області простору при рухомому джерелі променів, складається з рівнянь (6.22) та (6.29). З використанням  $R$ -функцій на основі цих рівнянь відбивальна поверхня описується у вигляді єдиного аналітичного виразу.

Викладений метод опису поверхні із зазначеними властивостями прийнятний, наприклад, при проектуванні стін теплиць, схилів терас, огорожень.

## **6.5. Геометричне моделювання автохвильових процесів**

До задач прикладної геометрії відносяться задачі геометричного моделювання проявів явищ самоорганізації в активних середовищах. Активні середовища характеризуються тим, що через кожний фізично малий елемент середовища протікає потік енергії від джерела, в результаті чого цей елемент виводиться зі стану рівноваги і набуває здатності здійснювати автоколивання, бути тригерним (бістабільним) або збуджуваним. Коли окремі такі елементи локально зв'язані між собою і формують розподілене активне середовище, то в подібному середовищі спостерігається формоутворення стаціонарних або залежних від часу автохвильових просторових структур. Ці структури (автохвилі) визначаються нетривіальними геометричними формами (графічними образами).

У задачах геометричного моделювання узагальнених паралельних множин як фронтів автохвильових процесів (двовимірних і тривимірних) побудова моделі визначається часом і зміною стану частинок (точок) активного середовища: збудження, рефрактерність, спокій.

### **6.5.1. Поняття та геометрична інтерпретація автохвильових процесів**

Під *автохвильовим* процесом розуміють хвильовий процес (включаючи стаціонарні структури) в активному нелінійному середовищі, який сам себе підтримує, зберігає свої характеристики незмінними за рахунок джерела енергії, що розподілене в середовищі. Ці характеристики – період, довжина хвилі (або імпульсу), швидкість поширення, амплітуда і форма – у сталому режимі залежать

тільки від локальних властивостей середовища і не залежать від початкових умов, а також при достатньо далекому розташуванні від границь середовища не залежать і від граничних умов. При цьому в середовищі зв'язок здійснюється через процеси перенесення дифузійного типу.

Прикладами автохвиль є хвилі горіння, концентраційні хвилі в автоколивальних хімічних реакціях, хвилі концентрацій електронів в оптоелектронних середовищах, хвилі електричного збудження у нервових і м'язних тканинах тощо. Їх моделюють для створення пристроїв обробки інформації, розробки методів підвищення ефективності хімічних технологічних процесів. Автохвилі, на відміну від електромагнітних та акустичних, не інтерферують між собою, не відбиваються від перешкод, а гинуть під час зустрічі з ними. Але, як і електромагнітні й акустичні хвилі, автохвилі мають здатність дефрагувати на неоднорідностях.

Автохвильові середовища характеризуються істотною нелінійністю. В цих середовищах протікають різні процеси, що характеризуються великою кількістю гармонік, мод тощо. Інакше кажучи, такі процеси є "колективними". Фізика автохвильових середовищ вважають одним з розділів науки – синергетики, яка розглядає проблеми самоорганізації, тобто спонтанного виникнення часових, просторово-часових і просторових структур у нерівноважних колективних системах.

В активному гомогенному середовищі можуть існувати двовимірні хвильові процеси – *ревербератори*. Двовимірні джерела хвиль – ревербератори – являють собою досить стабільні до зовнішніх збурень спіральні структури. Виникнення ревербератора пов'язане з розривом біжучого хвильового фронту. Причина розриву може бути зумовлена або початковими умовами, або тимчасовою втратою збуджуваності області від перешкоди, яку огинає хвиля. При цьому кінець плоскої хвилі починає загортатися й утворює замкнутий шлях проходження збудження (рис. 6.32). Залежно від параметрів середовища точка зміни фази може або знаходитися на місці, або рухатися по колу, або здійснювати періодичний рух на площині, наприклад, у вигляді "розетки".

Ревербератор, що складаються з кількох спіралей, є так званіми "багаторукавними" ревербераторами.



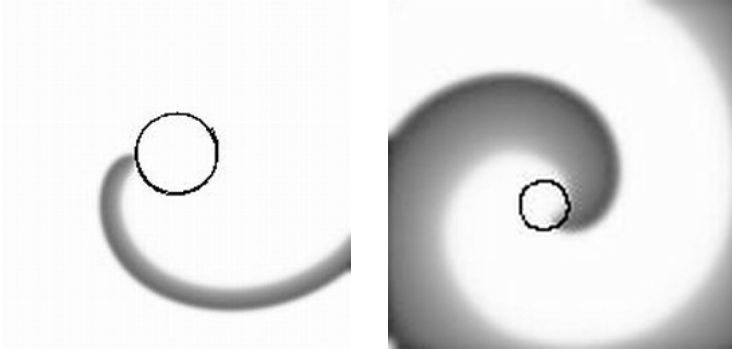


Рисунок 6.32 – Зображення ревербератора, кінець якого рухається по колу

Спіральні хвилі – ревербератори – є найхарактернішим різновидом автохвильових процесів і являють собою особливі джерела незгасаючих коливань у нелінійних розподілених системах. Однак при зміні параметрів середовища стійкість спіральних хвиль може бути порушено. При цьому спостерігаються нестационарні режими, які візуалізуються засобами комп'ютерної графіки.

### 6.5.2. Основні моделі автохвильових процесів

Під час розгляду двовимірних автохвильових задач обмежуються моделями з двох рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= F_1(x, y) + D_1 \nabla^2 x; \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= F_2(x, y) + D_2 \nabla^2 y,\end{aligned}\tag{6.30}$$

де  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $t$  – час;  $x, y$  – змінні, що характеризують систему, наприклад, концентрації частинок, температури тощо;  $D_1, D_2$  – коефіцієнти дифузії;  $F_1, F_2$  – у загальному випадку нелінійні функції, що описують взаємодію компонентів  $x$  і  $y$ .

Система кінетичних рівнянь (6.30) описує двовимірне дифузійне автохвильове середовище на феноменологічному рівні. Під час розв'язання неоднорідних і нестационарних задач параметри функцій  $F_1$  і  $F_2$  можуть залежати від просторових координат і часу. Система рівнянь (6.30) має бути доповненою початковими та граничними умовами.

Деякі види моделей опису автохвильових процесів: модель Фітц-Хью – Нагумо, модель Ходжкіна – Хакслі, модель Вінера – Розенблюта та ін.

### **6.5.3. Приклади графічного представлення автохвиль**

Нехай маємо двовимірне активне середовище, що складається з елементів, кожен з яких може перебувати в трьох різних станах: спокою, збудження і рефрактерності. Внаслідок "зовнішнього" впливу елемент переходить у збуджений стан, набуваючи здатності збуджувати сусідні елементи. Через якийсь час після збудження елемент перемикається в стан рефрактерності, перебуваючи в якому, він не може бути збуджений. Потім елемент сам повертається у початковий стан спокою, тобто знову набуває здатності переходити в збуджений стан.

*Узагальнена модель Вінера – Розенблюта.* Екран комп'ютера розбивається на "сіткові" елементи, обумовлені індексами  $i, j$ , що визначають ортогональну сітку (матрицю). Нехай стан кожного елемента описується фазою  $y_{i,j}(t)$  і концентрацією активатора  $u_{i,j}(t)$ , де  $t$  – дискретний момент часу.

Якщо елемент перебуває у спокої, то вважається, що  $y_{i,j}(t) = 0$ . Якщо внаслідок близькості збуджених елементів концентрація активатора  $u_{i,j}(t)$  досягає граничного значення  $h$ , то елемент збуджується і переходить у стан 1. Потім на наступному кроці він перемикається в стан 2, потім – у стан 3 і т. д., залишаючись при цьому збудженим. Досягнувши стану  $r$ , елемент переходить у стан рефрактерності.

Вважається, що через  $s$  ( $s > r$ ) кроків після збудження елемент повертається в стан спокою.

Реалізується таке правило:

$$y_{i,j}(t + \Delta t) = y_{i,j}(t) + 1, \text{ якщо } 0 < y_{i,j}(t) < s;$$

$$y_{i,j}(t + \Delta t) = 0, \text{ якщо } y_{i,j}(t) = s;$$

$$y_{i,j}(t + \Delta t) = 0, \text{ якщо } y_{i,j}(t) = 0, y_{i,j}(t) < h;$$

$$y_{i,j}(t + \Delta t) = 1, \text{ якщо } y_{i,j}(t) = 0, y_{i,j}(t) \geq h.$$

При переході зі стану  $s$  у стан спокою  $0$  концентрація активатора стає нульовою. За наявності сусіднього елемента, що перебуває у збудженому стані, концентрація збільшується на  $1$ . Якщо  $l$  найближчих сусідів збуджені, то на кроці до попереднього значення концентрації активатора додається число збуджених сусідів  $u_{i,j}(t + \Delta t) = u_{i,j}(t) + l$ . На практиці при складанні реальних програм обмежуються врахуванням найближчих восьми сусідніх елементів.

Алгоритм моделювання полягає у такому:

1. Задається певне число елементів активного середовища, визначаються його параметри  $s$ ,  $r$ ,  $h$ , а також початковий розподіл збуджених елементів.
2. Призначається початок циклу за  $t$ . Надається приріст за часом, тобто змінній  $t$  присвоюють значення  $t + \Delta t$ .
3. Перебираються всі елементи активного середовища, визначаються їхні фази  $y_{i,j}(t + \Delta t)$  й концентрація активатора  $u_{i,j}(t + \Delta t)$  в момент  $t + \Delta t$ .
4. Екран комп'ютера очищується, і на ньому зображуються збуджені елементи активного середовища.
5. Відбувається повернення до операції 2. Якщо цикл за  $t$  закінчився, то виконується вихід із циклу.

Це циклічний алгоритм, у якому обчислюються фази елементів середовища в наступні моменти часу та концентрація активатора, стирається попередній розподіл збуджених елементів і будується новий, забезпечується ефект синхронізації (коли при двох джерелах автохвиль відбувається їх взаємодія, і настає синхронізація коливань елементів середовища).

За алгоритмом складається програма для графічного моделювання активного середовища та процесу, що в ньому відбувається. Задаються початкові значення фази  $y_{i,j}(t + \Delta t)$  всіх елементів активного середовища, а також цикл за часом, у якому обчислюються значення  $y_{i,j}(t + \Delta t)$  в наступний момент  $t + \Delta t$  і здійснюється візуалізація результатів.

Параметрами середовища, наприклад, обираються  $r=6$ ;  $s=13$ ;  $h=5$ , тобто кожний елемент, крім тих, що перебувають у стані спокою. Кожний елемент може перебувати у шести збуджених станах і семи станах рефрактерності. Граничне значення концентрації активатора дорівнює 5. На кожному зображенні візуалізуються три об'єкти – однорукавна (або дворукавна) хвиля, пейсмеркер і перешкода. (Пейсмеркером називається такий елемент, який у часі здійснює періодичні коливання, тобто автоматично (через задане число кроків) переходить у збуджений стан 1.)

На рис. 6.33–6.35 наведено приклади візуалізації моделей автохвиль у двовимірному активному середовищі.

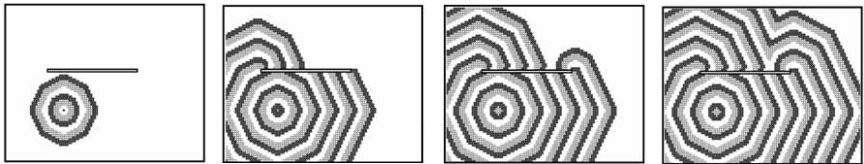


Рисунок 6.33 – Приклад дифракції автохвиль на перешкоді

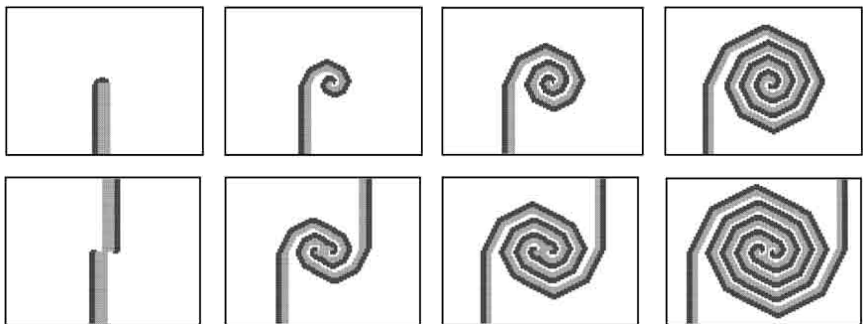


Рисунок 6.34 – Приклади однорукавної та дворукавної автохвиль

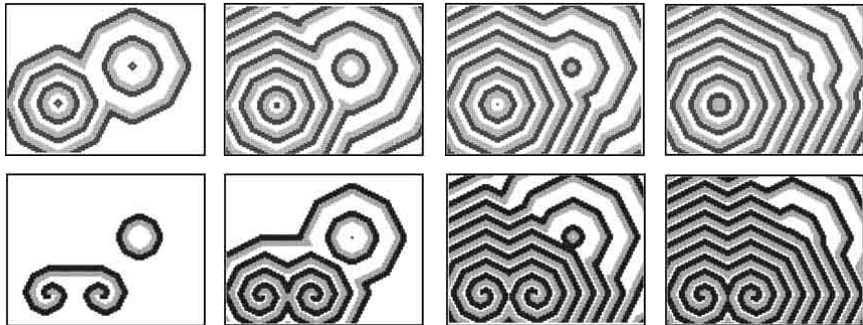


Рисунок 6.35 – Приклади взаємодії двох автохвильових процесів

#### **6.5.4. Комп'ютерне моделювання процесів на локальному рівні мовою "клітинних автоматів"**

Моделювання автохвильових процесів у фізичних і математичних задачах має супроводжуватися Графічна інтерпретація моделей автохвильових процесів досить ефективно реалізується за допомогою засобів комп'ютерного моделювання. Для візуалізації моделей складаються алгоритми, що базуються на тій чи іншій математичній моделі.

Дані для моделювання отримуються під час спостережень за явищем (феноменологічний підхід). Перетворення зображень здійснюється за допомогою логічних операторів. Якщо аналітичні методи моделювання спираються на концепцію пояснення механізму явища на інтегральному рівні, то методи на основі феноменологічного підходу базуються на концепції пояснення механізму явища на локальному рівні.

Алгоритмічна реалізація локального пояснення процесу здійснюється на основі алгоритму, запропонованого американським математиком Д. Конуеєм.

Алгоритм Конуея відомий у галузі клітинних кібернетичних автоматів. Його було створено для ілюстрації біологічних і кібернетичних процесів. Алгоритм Конуея отримав назву гри "Життя". Було виявлено, що ті ситуації, які виникають у процесі гри, схожі на реальні процеси, що відбуваються при зародженні, розвитку і загибелі колонії

живих організмів та систем об'єктів кібернетики, які взаємодіють за певними законами.

У грі "Життя" відсік площини розбито на клітини і плоскі фішки. Відсіком площини є екран монітора комп'ютера, а фішками – зображення пікселів. Основна ідея гри полягає в тому, щоб, розпочавши з якого-небудь розташування пікселів, простежити за еволюцією початкової позиції під дією "генетичних законів" Конуея, що керують народженням, загибеллю і виживанням організмів.

Конуей ретельно підбирав свої правила і перевіряв їх на практиці, домагаючись, щоб вони задовольняли три умови:

1. Відсутність конфігурації, для якої існував би простий доказ можливості необмеженого зростання популяції.

2. Одночасне існування таких початкових конфігурацій, що явно мають здатність розвиватися безмежно.

3. Існування простих початкових конфігурацій, що протягом значного проміжку часу зростають, зазнають змін і закінчують свою еволюцію одним із таких трьох способів:

1) цілком зникають (або через перенаселеність, тобто занадто велику щільність пікселів, або, навпаки, через розрідженість пікселів, що утворюють конфігурацію);

2) переходять у стійку конфігурацію і припиняють змінюватися взагалі;

3) виходять на коливальний режим, тобто нескінченний цикл перетворень із певним періодом.

Конуей запропонував такі генетичні закони:

1. Виживання. Кожний піксель, що має два або три сусідні пікселі, виживає і переходить у наступний такт життя.

2. Загибель. Якщо піксель має більше трьох або менше двох сусідніх пікселів, він гине. У першому випадку – від "перенаселеності", у другому – від "самотності".

3. Народження. Якщо якесь поле "життєвого простору" оточене трьома пікселями, то до кінця такту на ньому "народжується" новий піксель.

На основі алгоритму Конуея одержуються зображення етапів розвитку збурення у середовищі. Для перетворення зображень в алгоритмі використовуються логічні оператори.

Нехай задано дві матриці: матрицю  $\mathbf{A}$  з елементами  $a(i, j)$ , де  $i$  – номер рядка,  $j$  – номер стовпця, і матрицю  $\mathbf{B}$  з елементами  $b(i, j)$ , де  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , причому

$$b(i, j) = F[a(i, j); a(i + \tau_1, j + t_1); a(i + \tau_2, j + t_2); \dots; a(i + \tau_s, j + t_s)], \quad (6.31)$$

де  $F$  – булева функція;  $\{\tau, t\} \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

Такий варіант перетворення називається *паралельним перетворенням зображення* з булевою операцією  $F$  і записується у вигляді  $\mathbf{B} = F(\mathbf{A})$ , де  $F$  – оператор перетворення.

Кількість різних функцій  $F$ , які можна використовувати для обробки зображень навіть обмежених розмірів, є дуже великим. Якщо функція  $F$  залежить від елемента  $a(i, j)$  і його найближчих сусідів (по горизонталі, вертикалі, діагоналям), то  $F$  буде функцією дев'яти аргументів.

Кількість різних функцій дев'яти аргументів складає  $2^{512} > 10^{150}$ , тому перебирати всі функції і проводити їх аналіз для задач розпізнавання є недоцільним. Якщо ж врахувати те, що аргументами  $F$  можуть бути не тільки найближчі до  $a(i, j)$  елементи, то кількість різних функцій ще більше зросте.

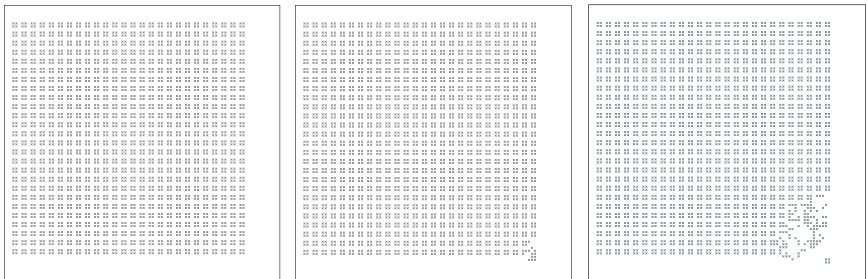
У грі "Життя" дискретні зображення перетворюються за допомогою спеціально підібраної булевої функції. Аргументами функції Конуея є елемент  $a(i, j)$  і вісім сусідніх з ним елементів. Елемент  $b(i, j) = 1$  тільки в тих випадках, коли  $a(i, j) = 1$  і серед сусідніх елементів є два чи три такі, що отримують значення одиниці, або якщо  $a(i, j) = 0$  і серед сусідніх елементів є рівно три такі, що отримують значення одиниці.

За допомогою багаторазового застосування функції Конуея до двоградаційного зображення одержуються певні перетворення початкових зображень: на певному кроці ці зображення можуть перетворюватися в стійкі конфігурації, що не змінюються при наступних застосуваннях оператора, а також можуть зникати цілком, переміщуватися за різними напрямками, розмножуватися (тобто створювати подібні до себе) та змінювати свій вигляд найнесподіванішим чином.

Наведений приклад лише ілюструє можливості булевих операторів для перетворення зображень. До того ж за результатами

застосування функцій Конуея можна також одержувати побічні дані про початкове зображення.

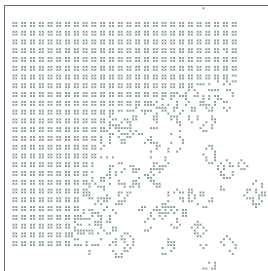
На рис. 6.36 показано низку зображень, що ілюструють розвиток гри "Життя" (етапів поширення збудення). Чинником змін виступає деякий піксель, наявність якого робить обрану систему нестійкою. Як приклад, такий піксель-збудник розташовано у правому нижньому куті клітинного поля масиву пікселів.



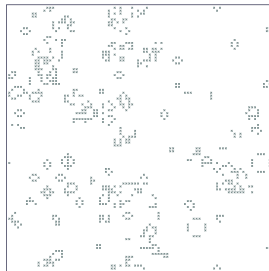
Початкове зображення пікселів

Фаза через 5 кроків

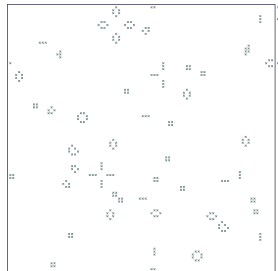
Фаза через 20 кроків



Фаза через 58 кроків



Фаза через 209 кроків



Фаза через 2507 кроків

Рисунок 6.36 – Деякі зображення етапів розвитку процесу збудення

Залежно від місця розташування пікселя-збудника модель може залишитися незмінною, що відповідає перебігу процесу в середовищі "під контролем", або модель може змінюватися відповідно до закономірностей поширення процесу. Наведений приклад ілюструє можливості візуального моделювання процесів у середовищах на основі принципів "клітинних автоматів".



### **Контрольні запитання та вправи**

1. Пояснити, чому важливою є візуалізація в геометричному моделюванні.
2. Назвати, в яких задачах доцільно використовувати геодезичні лінії.
3. Зміст задачі визначення шляху переміщення мобільного робота серед перешкод.
4. Метод потенціалів та його геометрична інтерпретація для моделювання трасування мобільного робота.
5. Сутність проблеми визначення міри хаотичності нелінійних систем.
6. Сформулювати задачу опису поверхні нерухомого відбивача у випадку рухомого джерела променів.
7. Поняття конфокальних параболоїдів обертання та їхнє використання в геометричній моделі відбивача.
8. Пояснити графічне подання автохвильових процесів.
9. Навести приклади автохвильових процесів.
10. Пояснити алгоритм моделювання процесу в двовимірному активному середовищі.





## СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В. Основи комп'ютерного моделювання в інженерній діяльності: навч. посіб. Миколаїв: ФОП Швець В. М., 2016. 276 с.
2. Васильєв С. В. Наближене конформне відображення круга на внутрішність многокутника // Геометричне та комп'ютерне моделювання. 2004. № 8. С. 112–119.
3. Васильєв С. В. Побудова конформного відображення верхньої півплощини на заданий многокутник // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2005. Т. 29. С. 59–63.
4. Гриньов Б. В., Кириченко І. К. Аналітична геометрія: підручник. Харків: Гімназія, 2008. 340 с.
5. Даниленко В. Я., Шоман О. В. Розрахункові сітки як результат геометричних перетворень // Геометричне моделювання та інформаційні технології. 2018. № 2 (6). С. 24–29.
6. Ковальов С. М. Параметричний аналіз в геометрії: навч. посіб. Київ: КДТУБА, 1999. 82 с.
7. Кованцов М. І. Проективна геометрія. Київ: Вища шк., 1985. 368 с.
8. Куценко Л. М. Метод опису геометричної форми відбивача у випадку рухомого джерела променів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. 2004. № 6. С. 3–8.
9. Куценко Л. М., Васильєв С. В., Шоман О. В. Метод прогнозування графічного прояву гетерогенної реакції (лісової пожежі) // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2005. Т. 30. С. 19–27.
10. Куценко Л. М., Шоман О. В. Геометричне моделювання силових ліній вихору при розв'язанні задачі фільтрації // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2005. Т. 29. С. 10–17.
11. Морозова Г. В. Автоматичний вибір шляху руху робота за допомогою різновидів методу потенціалів // Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2009. № 82. С. 283–389.

12. Морозова Г. В. Геометрична інтерпретація методу потенціалів для трасування шляху мобільного робота // Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2010. № 85. С. 65–70.

13. Найдиш В. М., Верещага В. М., Найдиш А. В., Малкіна В. М. Основи прикладної дискретної геометрії: навч. посіб. / за ред. В. М. Найдиша. Мелітополь: ВДП "Люкс", 2007. 194 с.

14. Прикладна геометрія, інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1: навч. посіб. / за ред. В. Є. Михайленко. Луцьк: ЛДТУ, 2006. 256 с.

15. Рвачов В. Л. Геометричні застосування алгебри логіки. Київ: Техніка, 1967. 212 с.

16. Рвачов В. Л. Теорія R-функцій та деякі її застосування. Київ: Наук. думка, 1982. 551 с.

17. Табакова І. С. Визначення необхідних та можливих напрямів обходу перешкод на шляху руху робота: мат. міжнар. наук.-пр. конф. // Сучасні проблеми геометричного моделювання. СПГМ-15. Мелітополь: ТДАТУ, 2013. С. 172–176.

18. Шоман О. В. Використання поверхонь однакового нахилу для одержання сімей паралельних кривих // Праці Таврійської державного агротехнічного університету. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2011. Т. 49. С. 11–16.

19. Шоман О. В. Паралельні множини в геометричному моделюванні явищ і процесів: монографія. Харків: НТУ "ХПІ", 2007. 288 с.

20. Шоман О. В., Даниленко В. Я. Розв'язання задач формоутворення двовимірних геометричних множин у тривимірному просторі // Сучасні проблеми моделювання. 2014. № 3. С. 147–152.

21. R функції. Енциклопедія кібернетики. Т. 2. Київ: Голов. ред. Укр. рад. енцикл., 1973. С. 379–380.

Навчальне видання

КУЦЕНКО Леонід Миколайович  
ШОМАН Ольга Вікторівна

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ  
ОБ'ЄКТІВ, ЯВИЩ І ПРОЦЕСІВ**

Навчальний посібник  
для студентів і аспірантів закладів вищої освіти

Відповідальний за випуск О. В. Шоман  
Роботу до видання рекомендував С. К. Шелковий  
За редакцією О. В. Шоман

Підписано до друку 20.11.2023. Формат 60×84/16.  
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура IBM Plex Serif.  
Ум. друк. арк. 15,38. Наклад 300 примірників.  
Зам. №. 4м/40-10-23. Ціна договірна

---

ТОВ "ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ЦЕНТР ГРУП"  
вул. Шатилова дача, 4, м. Харків, Україна, 61165  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
№. 7582 від 01.02.2022  
Опубліковано 24.11.2023 р.